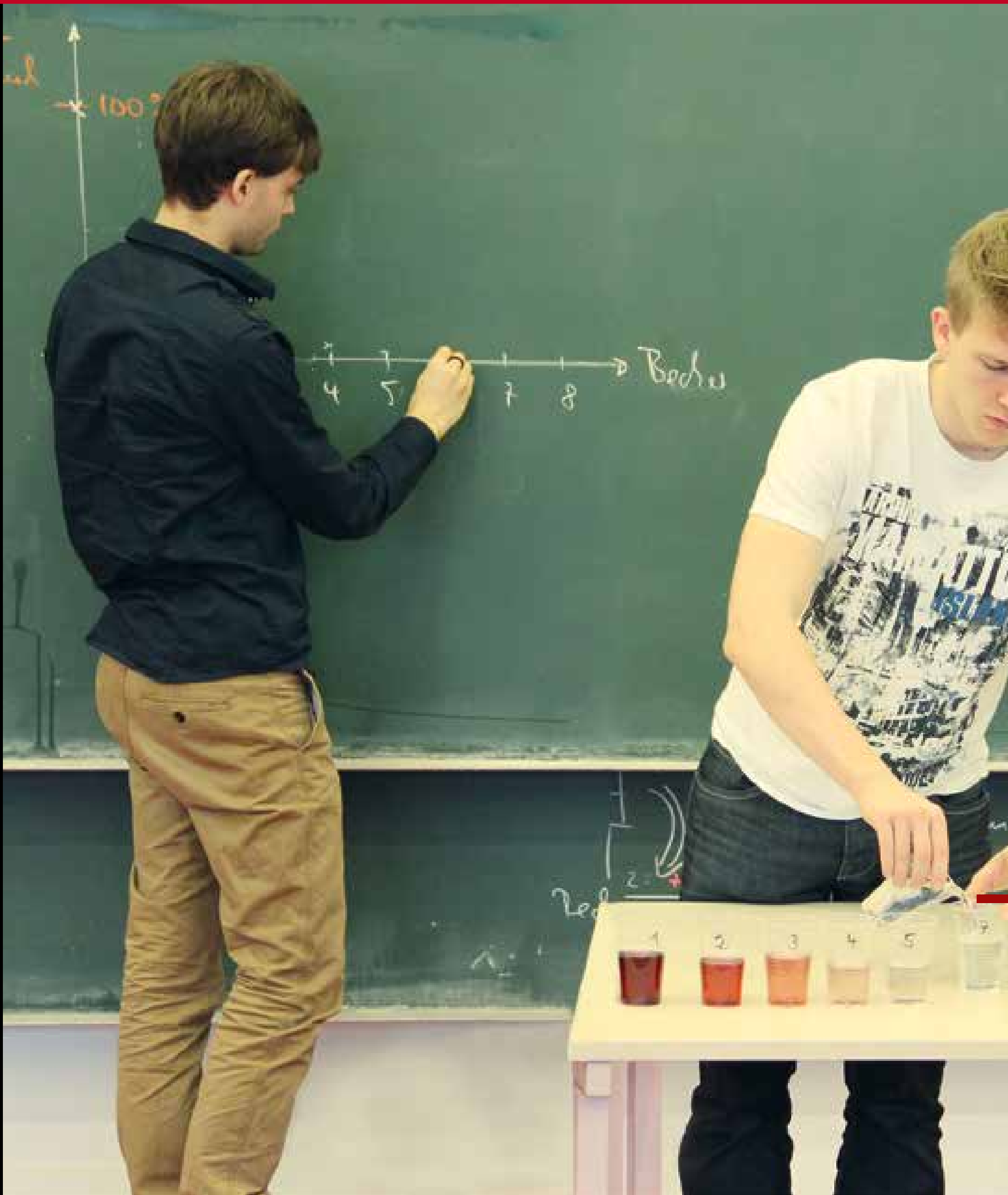
Martin Kramer (Hrsg.)

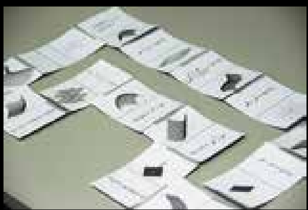
Algebra und Analysis als Abenteuer

Eine handlungs- und erlebnisorientierte Vorlesung



Unterricht lässt sich als Erlebnisort, als Abenteuer gestalten. Ziel der Vorlesung ist es, an konkreten Beispielen exemplarisch zu zeigen und zu erleben, wie „Begreifen“ und „Erfassen“ nachhaltig, gehirngerecht und in einem gruppendynamischen Kontext möglich sind.

Ein konstruktivistisches Lernverständnis erfordert eine tiefgreifende Haltungsänderung. Daher geht es nicht um richtige oder falsche Methoden. Vielmehr geht es um passend und unpassend. Es geht darum, Lehrer zu „werden“, statt Lehrer zu „machen“. Kurz: Es geht um Persönlichkeitsentwicklung.



Stimmen von Studierenden, die sich auf das Abenteuer eingelassen haben:

„Die in der Vorlesung vermittelten Konzepte sehe ich als große Bereicherung für meine berufliche Ausbildung. Vor dieser Vorlesung wäre ich nie auf die Idee gekommen, Unterricht so zu gestalten.“

„Es wird kein bestimmtes Konzept vermittelt. Wir werden dazu angeleitet, selbstkritisch darüber nachzudenken, was passiert, welche Auswirkungen unser Handeln hat und was am besten zu uns passt.“

„Die Ideen sind eine unglaubliche Bereicherung, die mir sicherlich eines Tages eine große Hilfe sein werden.“

Mathematisches Institut der Universität Freiburg
Abt. für Didaktik der Mathematik

Martin Kramer (Hrsg.)

Algebra und Analysis als Abenteuer

Martin Kramer (Hrsg.)

Algebra und Analysis als Abenteuer

Eine handlungs- und erlebnisorientierte Vorlesung

Herausgeber:

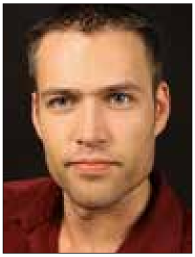
Martin Kramer, geb. 1973 in Esslingen am Neckar, Vater, Leiter der Abteilung für Didaktik der Mathematik an der Universität Freiburg, zahlreiche Publikationen, Lehrerfortbildungen zur professionellen Umsetzung einer handlungs- und erlebnisorientierten Didaktik, Theaterpädagoge (Bundesverband Theaterpädagogik), von 2003 bis 2012 Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik.

Tutorat und Mitarbeit:

Anna Staron

„Man kann einen Menschen nichts lehren; man kann ihm nur helfen, es in sich selbst zu finden.“

Dieses Zitat von Galilei beschreibt treffend nur einen vieler innovativer Aspekte, welche in der Vorlesung ihren Platz gefunden haben. Das vorliegende Skript verstehe ich als eine Art „Schatztruhe“, gefüllt mit sowohl kreativen Ideen und wertvollen Methoden für einen erlebnisorientierten Mathematikunterricht, als auch – und vielleicht noch viel mehr – gemeinschaftlichen Erfahrungen, welche die pädagogische Dimension entschieden würdigen.



Jan Staib

Mit der Entstehungsgeschichte des Vorlesungsskriptes verbinde ich sehr persönliche und gewinnbringende Erfahrungen. Nachdrücklich in Erinnerung bleibt mir die enge Zusammenarbeit mit den Studenten. Darüber hinaus wurden die Vorlesungsinhalte auf völlig neue Art und Weise vermittelt. Als besonders wertvoll empfinde ich die Bandbreite an kreativen, kommunikationspsychologischen und theaterpädagogischen Zugängen. Durch das gleichzeitige Einnehmen der Schüler- und Lehrerrolle haben sich für mich wieder und wieder neue didaktische und pädagogische Sichtweisen aufgetan, von denen ich als künftiger Lehrer sicherlich profitieren werde.

Die im Laufe dieser Vorlesung gemachten vielfältigen Erfahrungen haben mein Bild von Unterricht geprägt, bereichert und erweitert.

Korrektorat: Barbara Schuler
Layout und Cover: Bernd Burkart; www.form-und-produktion.de

Vorwort

Eine Vorlesung zu handlungs- und erlebnisorientierter Didaktik

Die zweistündige Vorlesung, die ich im Wintersemester 2012/13 am mathematischen Institut in Freiburg gehalten habe, geht von einem konstruktivistischen Lernverständnis aus: Wissen ist nicht direkt beschulbar, ein Erkenntnisfortschritt kann nicht von außen erzwungen werden.

Das Kind konstruiert sich seine eigene mathematische Welt bzw. Wirklichkeit. Damit dieses Welt-Wissen wachsen kann, bedarf es eines geeigneten Erlebnisortes. Unterricht lässt sich als Erlebnisort, als Abenteuer gestalten. Ziel der Vorlesung war es, an konkreten Beispielen exemplarisch zu zeigen und zu erleben, wie „Begreifen" und „Erfassen" nachhaltig, gehirngerecht und in einem gruppendynamischen Kontext möglich ist.

Zwei Rollen für die Hörer

Die Studierenden agieren einerseits wie Schulkinder im Klassenzimmer, andererseits sind sie in der reflektierenden Lehrerrolle. In meinen Büchern „Mathematik als Abenteuer" (drei Bände) findet der interessierte Leser weitere Übungen und statt der Studierenden sieht er Schüler auf den Bildern. Folgende Bilder zeigen die Praxisnähe.

Das Gehirn als Pflanze

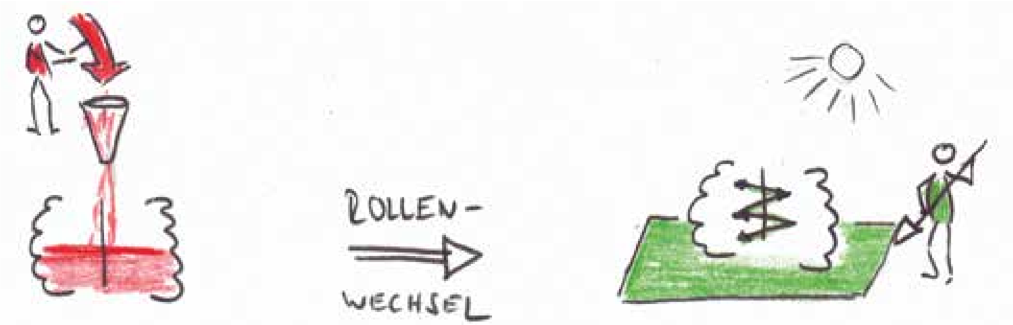
Das Gehirn des Kindes wird in eine Lernumgebung „gepflanzt". Es braucht Sonne, Erde, Wasser und Luft, damit es wachsen kann, und zwar in seiner individuellen Geschwindigkeit. Es bringt nichts, an der Pflanze zu zerren: „Das Gras wächst nicht schneller, wenn man daran zieht".

Das Bild der Pflanze zeigt ein stärkeorientiertes Lernverständnis. Sie wächst dort, wo sie am besten wachsen kann. Als „autonomer Datengenerator" [1] geht sie mit Lücken ganz anders um als ein „Speicher". Die Pflanze sucht nach „organischen Lösungen", sie wird nicht den größten Teil ihrer Energie dort hineinstecken, wo es „nichts bringt". Es geht um eine ganzheitliche Betrachtung und nicht nur um einen Zweig, kurz: Es geht ums Ganze.

Im Bild der Pflanze fehlt noch das fünfte Element, der wichtige Aspekt der Kooperation. Das Gehirn braucht Austausch, Dialog, Diskussion und Kooperation. In der Vorlesung wurde das mit farblich kodierten Langzeitgruppen, so genannten Farbgruppen, konkret umgesetzt.

Vom Beschulenden zum Strukturgeber – Rollenwechsel und Paradigmenwechsel

Wer Wissen als etwas begreift, das wachsen möchte, sucht nicht nach einem Trichter, um die Schüler zu belehren. Er wird stattdessen zum Gestalter einer Lernumgebung, zum „Gärtner".



Der beschriebene Rollenwechsel ist schwerer, als es im ersten Moment scheint. So zeigen sich traditionelle Dinge wie das Schulbuch oder der Tafelanschrieb in neuer Weise. Es geht um das, was im Schülerkopf passiert und nicht um das, was an der Tafel oder im Schülerheft notiert wird. Fehler erhalten eine andere Bedeutung. Wer heute noch keinen Fehler gemacht hat, hat vielleicht heute noch gar nichts gemacht.[2]

---

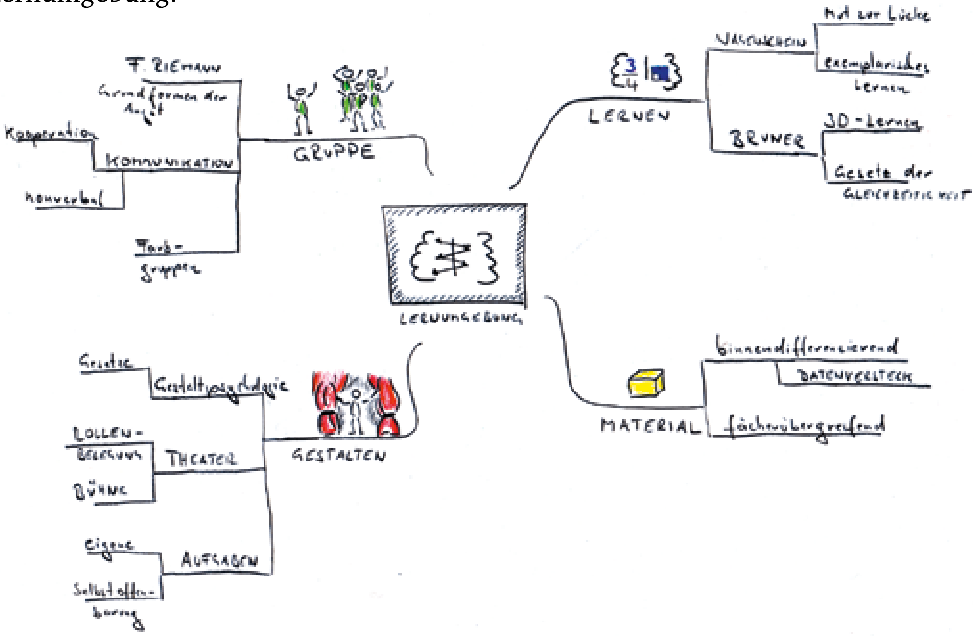
[1] Vgl. Ulrich Herrmann (Hrsg.), Neurodidaktik – *Grundlagen und Vorschläge für gehirngerechtes Lehren und Lernen,* Beltz 22009, Vorwort S. 15

[2] Vgl. auch Reinhard Kahl, Archiv der Zukunft (http://www.adz-netzwerk.de/Der-Fehler-ist-das-Salz-des-Lernens.php)

Ein konstruktivistisches Lernverständnis erfordert eine tiefgreifende Haltungsänderung. Appelle erweisen sich als „untaugliches Mittel für tiefgreifende Änderungen“.[3] Das Eintrichtern von Ratschlägen wie z. B. „Vergesst die Fächer“, „Bildet Lernteams“, „Vertieft Beziehungen“, „Fördert Werte“, „Schafft die Noten ab“, „Lasst ganztägig lernen“ nutzen nichts.[4] Einen Paradigmenwechsel kann man nicht verordnen oder befehlen. Daher geht es in der Vorlesung nicht um richtige oder falsche Methoden. Vielmehr geht es um passend und unpassend. Es geht darum, Lehrer zu „werden“, statt Lehrer zu „machen“. Kurz: Es geht um Persönlichkeitsentwicklung.

Überblick

Im Zentrum einer handlungs- und erlebnisorientierten Didaktik steht der Begriff der Lernumgebung.



Entstehung eines Skriptes

Die Vorlesung fand an zwei unterschiedlichen Terminen in der Woche statt. Jede Woche dokumentierte eine kleine Gruppe von Studenten Inhalte der Vorlesung. Insgesamt beteiligen sich ca. 100 Studenten, indem jeder Beitrag namentlich gekennzeichnet ist.

Die gemeinsame Skriptentstehung möchte als Pilotprojekt verstanden werden. Auf der nächsten Seite eine Skizze der Durchführung:

---

[3] Vgl. Friedemann Schulz von Thun, Miteinander reden Bd. I, Rowohlt Taschenbuch Verlag 1981, Abschnitt IV 2.2

[4] Die Appelle sind dem Zeit-Artikel über Richard David Prechts Thesen zum Schulsystem entnommen: „Schule kann mehr“, in: Die Zeit, 11. April 2013

Vorlesung in der jeweiligen Kalenderwoche	Montagstermin	Mittwochstermin
	Eine von mir ausgearbeitete Vorlage wird zur groben Orientierung ins Internet gestellt: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/didaktik/lehre/ws1213/ddaa/ unter „Ausarbeitungsvorlage Word 97 – 2003 doc“	
	Ca. vier Studenten aus der Montagsgruppe skizzieren die gehörte Vorlesung, überlegen und diskutieren eine Strukturierung der Inhalte.	Ca. vier Studenten (aus der Dienstagsgruppe) skizzieren die gehörte Vorlesung, überlegen und diskutieren eine Strukturierung der Inhalte.
Mittwochs, genauer: Montagsgruppe: 15:00 – 15:30 Uhr Dienstagsgruppe: 15:30 – 16:00 Uhr.	Vorgespräch in den einzelnen Kleingruppen in der Didaktik, jeweils 30 Minuten. Anwesend: Dozent, Tutoren. Geklärt werden formale und inhaltliche Fragen. Weiterhin gibt es Tipps zur Arbeitsaufteilung (teamorientiertes Arbeiten in Gruppen).	
Mittwoch, ab 16:00 Uhr	Die Montags- und Dienstagsgruppe fusionieren, teilen die erforderlichen Arbeiten auf: Wer liest Korrektur? Wer bearbeitet die Bilder? Wer schreibt welchen Text? Wer achtet auf die Gesamtzusammenstellung (keine Wiederholungen in den einzelnen Textabschnitten)?	
Montag, bis 6:00 Uhr	Abgabetermin einer gemeinsamen Ausarbeitung als PDF. Hier die Beispiele aus dem letzten Semester unter „Ausarbeitung der Vorlesung“: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/didaktik/lehre/ws1213/ddaa/ Die Ausarbeitungen werden als vorläufige Version auf die Homepage der Didaktik gestellt.	
Korrekturlesen durch Tutoren und Dozent	Die Ausarbeitung wird in den folgenden drei Tagen gelesen und gemeinsam (Tutoren und Dozent) durchgesprochen.	
Darauffolgender Donnerstag	Ein Tutor trifft sich mit der Gruppe und bespricht Änderungs- und Korrekturvorschläge. Es geht hier v. a. um fachliche Fehler oder Strukturierungsvorschläge.	
Nach Einarbeitung der Korrekturen.	Abgabe der Endfassung in einem Textbearbeitungsprogramm (z. B. Word). Die Bilder werden für den Satz extra benötigt und gesondert abgegeben.	
Korrektur der Korrekturen	Weiter Änderungsvorschläge werden von den Tutoren direkt vorgeschlagen. Die Studentengruppe kann diese Änderungen annehmen oder verwerfen.	
Veröffentlichung der endgültigen Version	Die Ausarbeitungen werden als endgültige Version auf die Homepage der Didaktik gestellt.	
Nach Abgabe aller Ausarbeitungen:		
Inhaltverzeichnis, Index	Alle Dokumente werden zusammengeführt. Tutoren und Dozent besprechen eine inhaltliche Reihenfolge bzw. das Inhaltsverzeichnis.	
	Es erfolgt ein Korrekturlesen auf Rechtschreibung. Ein Tutor erstellt einen Index.	
Diese letzte Fassung geht in den Satz, wird danach ein letztes Mal Korrektur gelesen (Bilder verschieben sich eventuell, Seitenbezug ändert sich, Indexkontrolle) und geht dann in den Druck.		

Dank
An erster Stelle möchte ich Anna Staron und Jan Staib für die konzentrierte, zeitaufwendige, einfühlsame und auch humorvolle Zusammenarbeit danken.

Über 100 Studenten gilt mein Dank für die Mitarbeit an diesem Werk und das Sich-Einlassen auf ein sehr ungewöhnliches Vorlesungsformat.

Weiter möchte ich Frau Schuler für die Korrektur und Herrn Burkart für den Satz und die Gestaltung des Umschlags danken. Schließlich möchte ich für die Offenheit, die Freiheit der Gestaltung, die Kooperation und Unterstützung hier im Institut, speziell Wolfgang Soergel, danken.

Martin Kramer

Download dieser Seiten als PDF unter
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/didaktik/downloads.de.html

Inhalt

Pädagogik und Methodik

1 Raum für handlungsorientierte Didaktik

1.1 Tische und Bänke rücken

Martin Kramer

Für viele Übungen wird freier Raum im Klassenzimmer benötigt. Die folgende Übung löst das Problem in Form einer gruppendynamischen Aufgabe, typischerweise in 60 bis 90 Sekunden, in akzeptabler Lautstärke. Man beachte, dass hier die Umstellung der Tische nicht als notwendiges Übel betrachtet wird, sondern als eine Übungsmöglichkeit für teamorientiertes Arbeiten.

Konkrete Umsetzung

Der Lehrer zeichnet an der Tafel die gewünschte Sitzordnung. In der Vorlesung sollten alle Tische mit der Längsseite an die Wand geschoben werden, die Stühle, von der Mitte des Raumes aus gesehen, an die Tische. Die Schulsachen kommen in den Ranzen und dieser unter den Tisch auf einen Stuhl. Der Ort des Tageslichtprojektors und des Lehrerpults werden ebenfalls eingezeichnet. Wenn alles gestellt ist, treffen sich die Schüler mit dem Lehrer in einem exakten Kreis. Während der Verrückung darf nicht gesprochen werden, es wird nur nonverbal kommuniziert. Der Lehrer legt nicht mit Hand an.

Die Schüler sollen vor Beginn der Übung zunächst einschätzen, wie lange die Umstellung dauern wird. Wer mit seiner Schätzung fertig ist, verschränkt die Arme. Es geht weiter, wenn alle Arme verschränkt sind. Auf ein Zeichen des Lehrers zeigt jeder seinen Schätzwert an, dabei steht ein Finger für eine Minute. Wer mehr als zehn Minuten anzeigen möchte, kreuzt die Arme. Elf Minuten werden mit gekreuzten Armen und einem Finger angezeigt.

Die Schüler sollen gegenseitig wahrnehmen, wer wie viele Finger anzeigt. Meist ergeben sich im Schnitt Werte zwischen drei und fünf Minuten. Nun wird mit dem Startzeichen des Lehrers umgestellt.

Zum Schluss wird die Zeit genommen und die Schüler schätzen erneut ihre Zeit. Wieder werden die Arme verschränkt, diesmal steht ein Finger für 10 Sekunden. Typische Ergebnisse für Schulklassen liegen zwischen 60 und 90 Sekunden.

Hintergründe

Arme verschränken – wenige Sekunden, um Ideen zu retten

Würde jeder Schüler seinen Schätzwert anzeigen, sobald er fertig ist, müssten sich die anderen daran orientieren. Wirklich frei kann man sich nur entscheiden, wenn man keinen Orientierungswert (einen Anker) von außen bekommt. Die wenigen Sekunden, die der Lehrer wartet, bis alle Arme verschränkt sind, retten die freie Entscheidungsmöglichkeit der Mitschüler.

Gruppendruck – wenn alle Arme verschränkt sind, geht es weiter

Prinzipiell hat jeder Schüler die Möglichkeit, sich beliebig lange zu entscheiden, aber er wird es nicht tun. Wenn alle bereits fertig sind und alle auf ihn warten, wird er sich entscheiden, weil ein Gruppendruck auf ihn wirkt. Der Lehrer achte darauf, dass er den Gruppendruck nicht gegen den Schüler verwendet, z. B. in Form von Ausgrenzung oder Bloßstellung. Die Gefahr der Bloßstellung ist hier allerdings, im Vergleich zu einem Unterricht, in dem ein einzelner Schüler vor der ganzen Klasse abgefragt wird, gering. Die Sache mit den verschränkten Armen ist ein Beispiel für eine positive Anwendung des Gruppendrucks im Unterricht. Es ist eine starke Möglichkeit um Gruppen zu lenken.

Nonverbale Kommunikationssysteme

„Wer so weit ist, verschränkt die Arme." Damit wird die Information „Ich bin schon fertig" oder „Ich bin noch nicht fertig" angezeigt. Eine verbale Ja-Nein-Abfrage ergäbe ein Chaos oder wäre zumindest sehr zeitaufwendig.

Mit den Fingern lässt sich die nonverbale Kommunikation noch erweitern. Jetzt werden mengenhafte Aussagen möglich. Gerade im Fach Mathematik können solche Angaben häufig verwendet werden. Mit den Fingern wird angezeigt, was 2 + 3 ergibt oder die dritte Wurzel aus 64 oder der Logarithmus von 8 zur Basis 2, ... Anwendungen gibt es genug.

Man beachte, dass bei dieser Abfragemethode kein Schüler vorgeführt wird und dennoch alle gleichzeitig abgefragt werden. Das ist ungefähr das Gegenteil des bisher üblichen Unterrichts. Dort wird ein einziger Schüler vor allen Augen abgefragt, die Gefahr der Bloßstellung ist exorbitant hoch. Auch bleibt fragwürdig, ob die Rechenkompetenz von 2 + 3 geprüft wurde oder vielmehr Stressfähigkeit und Umgang mit Lampenfieber.

Ein weiterer Aspekt der nonverbalen Kommunikation liegt in der Tatsache, dass jeder jede Antwort sehen kann. Jede Aussage hat mehrere Botschaften.[5]

[5] Vgl. Schulz von Thun, *Miteinander reden,* Band I, Rowohlt ^{48}2010

Neben dem Informationsanteil des Schätzwertes ist gleichzeitig eine Selbstoffenbarung mit im Spiel. Man macht eine andere Aussage über sich selbst, ob man zwei oder zwanzig Finger anzeigt. Es ist spannend zu sehen wer was vermutet. Man beachte die enorme Anzahl an Kommunikationsachsen: Bei einer Klasse mit 28 Schülern gibt es 378 (!) Achsen:

$$1 + 2 + 3 \ldots + 26 + 27 = (1 + 27) \cdot \frac{27}{2} = 378$$

1.2 Der Museumsraum

Lea Specht und Simon Klotz

Konkrete Umsetzung

Vorbereitung

Die Schüler sollen sich außerhalb der Unterrichtszeit in den Farbgruppen (Langzeitgruppen) zusammensetzen, um sich gemeinsam für ein bestimmtes Buch eines übergreifenden Themas zu entscheiden.

Durchführung im Unterricht

Im Unterricht soll dann eine Art „Museumsraum“ gestaltet werden. Je zwei Tische werden so zusammengestellt, dass Lücken als Durchgang freibleiben.

Die Schüler versammeln sich in ihrer jeweiligen Gruppe an den zusammengestellten Tischen und räumen sie bis auf das ausgesuchte Buch komplett frei. In jeder Gruppe bleibt einer am Tisch stehen („Experte"), während die Mitschüler herumgehen und sich die Bücher der anderen Gruppen anschauen. Der Experte erklärt, warum seine Gruppe sich für das jeweilige Buch entschieden hat.

Am Schluss soll sich nun jeder zu dem Buch stellen, welches ihn am meisten anspricht.

Hintergründe

Die Leistungsvorteile einer Gruppe

Wichtig bei der Bücherauswahl ist die Gruppendynamik, genauer die Leistungsvorteile einer Gruppe, beschrieben auch von Peter Wellhöfer in seinem Buch „Gruppendynamik und soziales Lernen":

Jeder soll sich zunächst alleine um die Problemlösung bemühen, um dann anschließend in der Gruppe ausführlich zu diskutieren, warum sie sich für das jeweilige Buch entschieden haben. Dabei müssen die Lösungen jeder Person akzeptiert werden, auch die der vermeintlich Schwächeren, was neue Sichtweisen aufwerfen kann. Die Gruppe entscheidet sich am Ende nur für eines der Bücher, wobei alle Mitglieder diese Entscheidung tragen können sollten.

Tisch als „Bühne"

In dem Museumsraum fungiert nun der freie Tisch als Bühne. Er sollte bis auf den Gegenstand des Interesses komplett frei sein, damit die Schüler nicht durch zusätzliche Gegenstände abgelenkt werden. Der einzelne Gegenstand erlangt dadurch sofort Aufmerksamkeit und man macht sich automatisch Gedanken zu dem, was da liegt. Dazu gehört z. B. auch, die Tafel von fremden Texten freizumachen, selbst wenn sie nicht benutzt wird und nur im Hintergrund wirkt.

Material als Anordnung

Legt man auf einen leeren Tisch zum Beispiel ein Blatt Papier und eine Schere, so verbinden die meisten Menschen dies mit dem Schneiden des Papiers.

Liegt nun statt der Schere z. B. eine Streichholzschachtel da, wird damit ein Anzünden des Papiers assoziiert. Fügt man noch einen Klebstift hinzu, gehen die Gedanken wieder in eine völlig andere Richtung, z. B. Richtung basteln.[6]

Gesetz der Nähe

Hier wirkt auch das Gesetz der Nähe. Man verbindet Gegenstände eher miteinander, wenn sie nahe beieinander liegen. Liegen also Schere und Papier direkt nebeneinander, die Streichholzschachtel aber z. B. am anderen Ende des Tisches, sieht man zwischen den drei Gegenständen nicht direkt eine Verbindung.

Deswegen ist es auch besser, wenn man alles, was man nicht mehr benötigt, zur Seite, also aus dem Aufmerksamkeitsbereich heraus, legt.

1.3 Auditorium

Esther Renz, Lara Rößler, Pascal Schade und Juliane Wilms

Dies ist eine Methode mit der Schüler ihre selbstangefertigten Texte vor der Klasse vortragen können.

Konkrete Umsetzung

Es wird ein Vortragsraum errichtet, in dem die Schüler das Präsentieren üben können. Ein Tisch dient hierbei als Bühne, ein Stuhl als Treppe dorthin. Mit einem Tageslichtprojektor kann ein Scheinwerferlicht auf die Wand hinter der Bühne gerichtet werden. Jeweils ein Schüler kann nun freiwillig über den Stuhl die Bühne betreten und seinen Text vortragen. Die anderen Schüler versammeln sich sitzend oder stehend vor dem Tisch.

Bemerkung

Das Konzept ist nicht themengebunden, d. h. der Inhalt der Kurzvorträge bleibt variabel. Es können sowohl Ergebnisse derselben Schulstunde, als auch in der Vergangenheit, zum Beispiel als Hausaufgabe verfasste Texte, vorgetragen werden.

Hintergründe

Übung macht den Meister

Heutzutage wird es immer wichtiger, souverän vor einer Gruppe zu stehen und dieser schlüssig etwas mitteilen zu können. Bei dieser Übung können verschiedene Kom-

6 Vgl. Kramer, Martin: Mit Erbsen und Zahnstochern, Weinheim und Basel: Beltz Verlag 2011, S. 117

petenzbereiche des Präsentierens trainiert werden, wie zum Beispiel das ruhige Stehen oder die klare, feste Stimme.

Freiwillige vor!

Die Schüler sollen selbst entscheiden dürfen, ob sie sich ins Rampenlicht stellen möchten oder nicht. So wird niemand in eine unangenehme Lage gebracht. Denn alleine vor einer großen Gruppe zu stehen, stellt für den einen oder anderen ein Problem dar. Es spricht nichts dagegen, dass diese Schüler zunächst die Rolle des stillen Beobachters einnehmen. Sollte sich einmal kein „mutiger Erster“ finden lassen, zum Beispiel bei der Erstanwendung des Konzepts, kann der Lehrer mit gutem Beispiel vorangehen und die Vortragsweise demonstrieren. Wer sich traut, wird belohnt, da er lernt, mit unbekannten oder ungewohnten Situationen umzugehen und diese zu meistern.

Sicherheit auf der Bühne

Der Nervosität und eventuellem Unbehagen des Vortragenden wirken zwei wichtige Aspekte entgegen. Zum einen wird der Leser durch das Scheinwerferlicht geblendet und somit daran gehindert, die Personen im Publikum erkennen zu können. Dadurch sinkt die Wahrscheinlichkeit, sich vorgeführt zu fühlen; die Bühne wird im Gegenteil eher als schützender Rahmen empfunden. Außerdem wendet sich das Publikum durch das Aufstellen im Halbkreis komplett dem Mitschüler auf der Bühne zu und schenkt ihm somit seine ungeteilte Aufmerksamkeit und Wertschätzung.

Qualität und Inhalt des Textes

Wissen die Schüler im Voraus, dass der zu schreibende Text eventuell vorgetragen werden soll, können sie sich darauf einstellen und geben sich eventuell mehr Mühe, als wenn sie den Text nur für sich selbst schreiben. Es entsteht also eine gewisse Erwartung an sich selbst, die sich positiv auf die Qualität des Textes auswirken kann.

Bemerkung

Besonders gut geeignet sind humoristische Texte, da der Leistungsdruck hier nicht zu groß wird und die Zuschauer den Inhalt des Texts in einer lockeren, unterhaltenden Atmosphäre aufnehmen können.

2 Gruppenunterricht

2.1 Langzeit- bzw. Farbgruppen

Martin Kramer

Konkrete Umsetzung

Jeder in der Klasse schreibt seinen Namen auf einen Zettel und legt ihn zusammengefaltet auf das Pult. Der Lehrer zieht nacheinander die „Lose“ und legt stets vier davon unter unterschiedlich farbige Kreiden bzw. Stifte. Damit gehören je vier Schüler zu einer bestimmten, farblich kodierten, Gruppe, der so genannten Farbgruppe.

Es eignen sich die Spektralfarben: gelb – orange – rot – violett – blau – grün. Bei großen Klassen kann mit weiß und braun ergänzt werden. In der Praxis entstehen ca. sechs oder sieben Gruppen.

Bei der Aufteilung in Vierergruppen können ein, zwei oder drei Schüler übrig bleiben. Diese werden dann vom Lehrer auf bestehende Gruppen verteilt. Die Gruppen bleiben bis zur nächsten Klassenarbeit zusammen.

Erweiterung

Gibt es in der Klasse zwei Personen, bei deren Zusammensein das Chaos im Unterricht bereits vorprogrammiert ist, so können diese vor der Ziehung in Absprache mit der Klasse vom Lehrer in verschiedene Farbgruppen gelegt werden. Dabei bleibt die Zufälligkeit der Gruppenbildung unberührt, bis auf die eine kritische Kombination.

Hintergründe

Sandwichprinzip

Der Mensch ist ein „Gruppentier" und ein „Einzelwesen". Er strebt sowohl nach der „Herde" als auch nach Individualität. Das Sandwichprinzip versucht diese grundlegenden Strebungen im Unterricht abzubilden, indem es kollektive und individuelle Arbeitsphasen systematisch abwechselt. Stark vereinfacht wird 50 % individuell und 50 % gruppal gelernt.

Gruppenvorteil

Peter Wellhöfer gibt in seinem Buch „Gruppendynamik und soziales Lernen"[7] konkrete Vorschläge, um den so genannten Gruppenvorteil zu nutzen. Möchte die Gruppe besser sein als der Beste in der Gruppe, muss sich insbesondere jeder zuerst selbst ernsthaft um eine Lösung bemühen. Man beachte: der Gruppenvorteil benötigt eine individuelle Phase.

Gruppengröße – warum Vierergruppen?

Kooperatives Arbeiten gelingt erst ab zwei Personen. Partnerarbeit ist hierbei am wenigsten anfällig für Störungen, weil es z. B. keinen Dritten gibt, der ausgegrenzt werden kann. Wer schon einmal zu dritt in den Urlaub gefahren ist, weiß, wie schnell Zwei-zu-eins-Situationen entstehen können. Vierergruppen sind viel weniger anfällig für solche Konflikte.

Mit zunehmender Gruppengröße steigen die Kommunikationsachsen (wer mit wem sprechen könnte) rapide an. So gibt es bei vier Teilnehmern sechs Kommuni-

7 P. Wellhöfer, *Gruppendynamik und soziales Lernen,* UTB Stuttgart [4]2012, Abschnitt 4.1 ff

kationsachsen, bei fünf bereits elf. Ab einer bestimmten Gruppengröße ist effektives Arbeiten schwer möglich. Deshalb wird hier der Vierergruppe der Vorzug gegeben.

Die Bedeutung von kooperativem Arbeiten lässt sich gut bei Joachim Bauer in Prinzip Menschlichkeit[8] nachlesen.

2.2 Drei erste Farbgruppenaufgaben

Martin Kramer

Konkrete Umsetzung

Die Gruppe überlegt sich zuerst eine Sitzordnung, die folgende Bedingungen erfüllt: Es müssen möglichst wenig Tische und Bänke bewegt werden und alle sollen möglichst gleichberechtigt sitzen (erste Aufgabe). Dann soll in Anlehnung zu der jeweiligen Gruppenfarbe ein Logo (zweite Aufgabe) und ein Gruppenname (dritte Aufgabe) überlegt und an die Tafel gezeichnet bzw. geschrieben werden. Allerdings werden naheliegende Namen und Logos verboten. So darf die gelbe Farbgruppe keine Zitrone, Banane oder Sonne verwenden, die Roten kein Blut, keine Kirsche und kein Herz usw. Eine Viertelstunde ist für eine typische Schulklasse eine gute Zeitspanne. Am besten schreibt man die Uhrzeit, zu der die Logos an der Tafel stehen sollen, an die Tafel.

8 J. Bauer, *Prinzip Menschlichkeit: Warum wir von Natur aus kooperieren,* Heyne Verlag ^{5}2011

Hintergründe

Warum Zufallsgruppen?

Es gibt viele Möglichkeiten der Gruppenaufteilung. In *Physik als Abenteuer*[9] werden Farbgruppen, die das Leistungsspektrum abbilden, und niveaudifferenzierte Farbgruppen vorgeschlagen. Die Einteilung durch den Zufall ist einfacher. Die Verantwortung über die Gruppeneinteilung wird vom Zufall übernommen, dieser wird von allen akzeptiert – aus welchem Grund auch immer. Die Zufälligkeit bildet gut die spätere Arbeitswelt ab, auch hier kann man sich seine Partner im Allgemeinen nicht aussuchen.

Logo und Gruppenname

Mit dem Logo ergibt sich ein erster gruppaler Zusammenhang. Hier erhält die Gruppe zum ersten Mal ein eigenes Symbol und somit wird ihre Realität sichtbar gemacht. Man beachte, dass das Phänomen der Gruppe sich nur schwer abbilden lässt. Vier Leute, die auf einem Foto abgebildet sind, zeigen die einzelnen Teilnehmer der Gruppe. Grund für die hohe Bedeutung der Gruppe ist Kooperation und diese lässt sich nur schwer fotografisch abbilden.

Damit die Gruppe tatsächlich eine Aufgabe bekommt, werden die Standards (rot für Kirsche, Herz oder Blut) verboten.

2.3 Innere Struktur von Farb- bzw. Langzeitgruppen

Franziska Schuster und Claudia Roosen

Rollenverteilung bei einer Gruppenarbeit

Die Rolleneinteilung der Gruppen bildet das Fundament einer funktionierenden Gruppenarbeit, deshalb sollte die Vorgehensweise bei der Einteilung genau überlegt sein. Bildet man Gruppen von vier Personen, bietet sich folgende Rollenverteilung innerhalb einer Gruppe an.

- Zeitwart

Der Zeitwart sorgt dafür, dass die Gruppe die Aufgabe in der vorgegebenen Zeit bearbeitet. Bei der Bearbeitung von Aufgabenstellungen in einer Gruppe kommt es oft zu langen Diskussionen oder Gesprächen, die vom Thema abweichen. Hier muss der Zeitwart einschreiten.

9 M. Kramer, *Physik als Abenteuer (Band I),* Aulis Verlag 2011, Kapitel 4

- Materialwart

Der Materialwart sorgt dafür, dass das benötigte Material vorhanden ist und nach der Gruppenarbeit wieder in gutem Zustand zurück gebracht wird. Sollte etwas beschädigt sein, liegt es an ihm, mit der Gruppe zu besprechen, wie der entstandene Schaden ersetzt wird.

- Protokollant

Die Aufgabe des Protokollanten besteht darin, alle Daten, Beobachtungen oder Messungen zu notieren. Er ist verantwortlich dafür, dass Papier und Bleistift vorhanden sind. Am Ende muss er die Daten und Ergebnisse an alle Gruppenmitglieder weiterleiten.

- Gesprächsführer

Stillere Schüler kommen bei einer Gruppenarbeit oft nicht zu Wort oder trauen sich nicht, ihre Meinung zu vertreten. Die Aufgabe des Gesprächsführers ist es daher, dafür zu sorgen, dass alle Mitglieder der Gruppen ihre Ideen und Vorstellungen mitteilen können.

Hintergrund

Einteilung in Gruppen

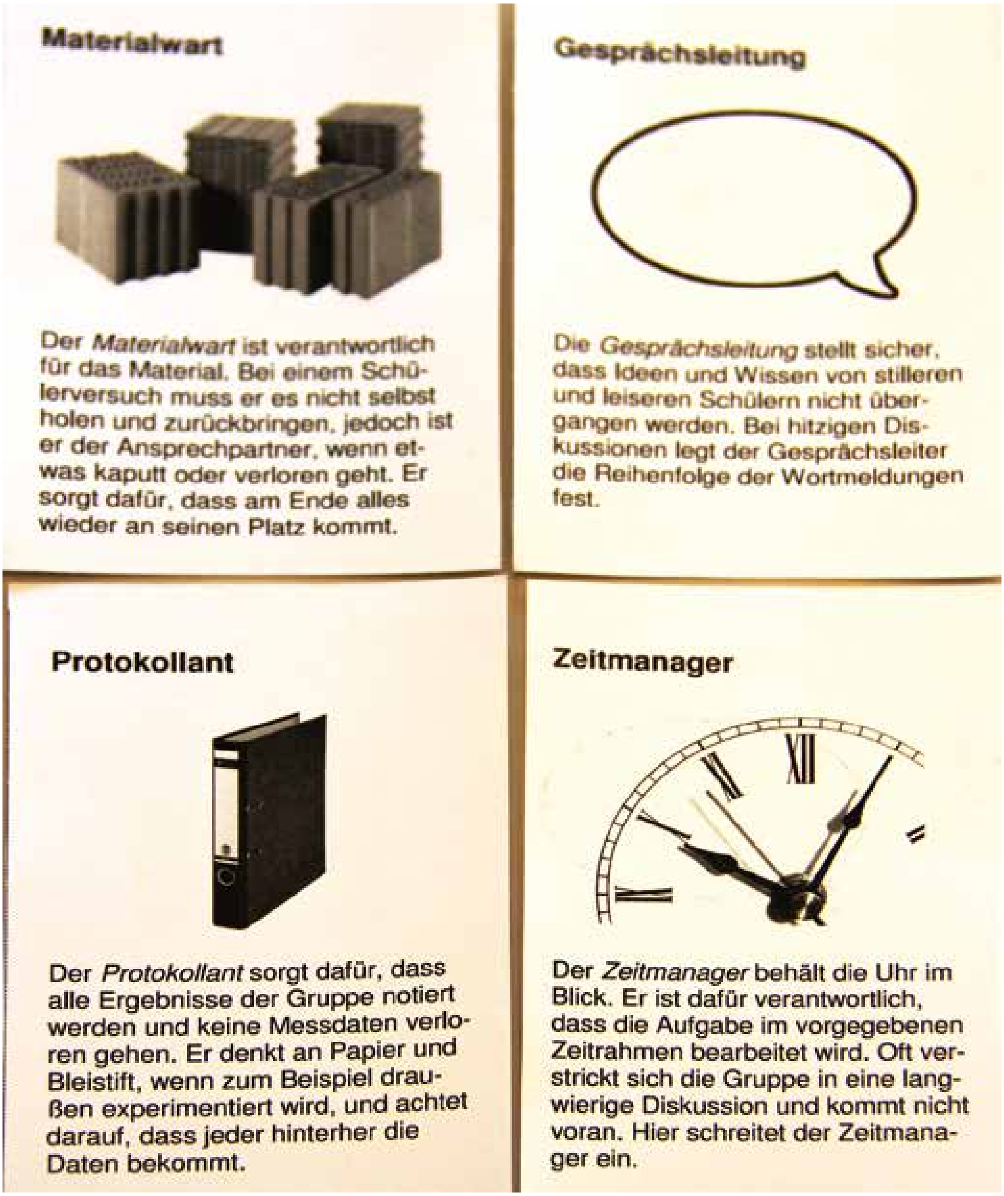
Zur Einteilung nach diesem Muster bietet es sich an „Rollenkarten“ zu verteilen, so weiß jeder ganz genau, was seine Aufgaben in der Gruppe sind. Zudem ist es wichtig, dass die Rollen getauscht werden; beispielsweise jede Woche, damit jeder einmal jedes Amt übernehmen darf und sich die extrovertierten Schüler nicht immer die vorteilhaftesten Aufgaben aussuchen können.

Link zum Download der Rollenkarten nach obigem Muster:
http://www.unterricht-als-abenteuer.de/download/Rollenkarten%20fuer%20Gruppenunterricht.pdf

Verantwortung kann nur an Einzelne delegiert werden

Ohne klare Rollenverteilung fühlt sich keiner für eine bestimmte Aufgabe in der Gruppe verantwortlich. Folgende Situation kennt man aus dem Alltag.

1. Angenommen Sie stehen in der S-Bahn und Ihr Geldbeutel wird gerade von einem Jungen geklaut. Sie rufen um Hilfe, doch keiner fühlt sich angesprochen. Der Junge mit dem Geldbeutel entkommt.
2. Angenommen Sie stehen in der S-Bahn, ein Junge klaut Ihren Geldbeutel und Sie rufen: „ Hallo, Sie mit dem grünen Mantel! Halten sie den Jungen!“ Alle schauen



> sich um, die Person im grünen Mantel fühlt sich angesprochen und hält daraufhin den Jungen mit dem Geldbeutel fest. Sie haben ihren Geldbeutel wieder im Besitz!

In einer großen Gruppe ist es wichtig, die Mitglieder gezielt und persönlich anzusprechen, wie obiges Beispiel einer Alltagssituation verdeutlichen soll. Aber nicht nur in der S-Bahn, sondern schon für kleine Gruppen, wie sie in Abschnitt 1.2 beschrieben sind, ist es wichtig, die Mitglieder gezielt ansprechen zu können, was nur mit einer geeigneten Rollenverteilung möglich ist.

Rollenverteilung bei Gruppenarbeiten

Wie man in der Alltagssituation gesehen hat, ist es wichtig, in einer Gruppe Rollen zu verteilen, damit produktiv gearbeitet werden kann. Nur so kann bei auftretenden Problemen ein Verantwortlicher gefunden werden. Bei einer Gruppenarbeit, in der beispielsweise Kleber, Schere und Papier benötigt werden, wird es ohne eine geregelte Verteilung der Aufgaben, also in diesem Fall einem Materialwart, Gruppen geben, die drei Klebstifte, keine Schere, aber viel zu viel Papier auf dem Arbeitstisch bereit liegen haben.

Wird die Gruppe auf das fehlerhafte Arbeitsmaterial angesprochen, will beziehungsweise kann auch keiner dafür verantwortlich gemacht werden. Sind die Aufgaben bereits im Voraus verteilt worden, kann der Materialwart vom Lehrer gezielt angesprochen werden und die Situation wird geklärt. Der Materialwart entspricht in seiner Position der Person mit dem grünen Mantel von obiger Alltagssituation.

Wer nimmt welche Rolle in der Kleingruppe ein?

Die Einteilung kann entweder in der Gruppe selbst geschehen, also derart, dass sich die Schüler gegenseitig ihre Rollen zuteilen, oder aber durch den Lehrer.

Bei der Selbsteinteilung durch die Schüler, kann der Lehrer beobachten, wie das Miteinander in der Gruppe funktioniert.

Bei der Einteilung durch den Lehrer kann sichergestellt werden, dass eventuell schwächere Schüler nicht benachteiligt werden, beziehungsweise, dass die Rollenverteilung nicht immer dieselbe ist.

Rollen des Lehrers bei einer Gruppenarbeit

Gestalter der Lernumgebung

Vor Beginn der Gruppenarbeit sollte der Lehrer die jeweiligen Gruppen einteilen und den genauen Arbeitsauftrag vorgeben. Dazu gehört das genaue Festlegen, welche Gruppe welches Thema zu erarbeiten hat und wie viel Zeit dafür zur Verfügung steht. Dadurch setzt er den gesamten Arbeits- und Lernprozess (überhaupt erst) in Gang.

Beobachter & Berater

Während der Gruppenarbeitsphasen bleibt der Lehrer im Hintergrund und beobachtet aufmerksam das Geschehen. Somit kann er nicht nur den Fortschritt der einzelnen Gruppen feststellen, sondern bei eventueller Unruhe auch gezielt eingreifen. Sollte zudem der Lern- und Arbeitsprozess einzelner Gruppen ins Stocken geraten sein, steht er als Berater zur Seite und kann gezielt Konfliktlösungsmodelle anbieten. Dabei muss der Lehrer aber immer wieder neu entscheiden, wann und wie er eingreifen soll, denn je mehr der Lehrer spricht und hilft, umso weniger haben die Schüler Zeit, ungestört zu arbeiten und selbständig ihre Probleme zu lösen. Der Unterricht wird vom Material getragen.

Ressourcenorientierung

Nach Beendigung der Gruppenarbeit sollte der Lehrer ein kurzes Feedback über die Interaktionsprozesse geben, die er während der Arbeitsphasen beobachten konnte und dabei Positives hervorheben.

3 Kommunikation

3.1 Möglichkeiten der nonverbalen Kommunikation

Claudia Roosen und Franziska Schuster

In den vorigen Kapiteln wurden bereits Möglichkeiten der nonverbalen Kommunikation vorgestellt. Diese sollen hier kurz, anhand prägnanter Beispiele, erklärt und durch weitere Möglichkeiten ergänzt werden.

Rückmeldung durch Körperhaltung

Die Schüler sollen die Arme verschränken, wenn sie für sich die Antwort auf eine Fragestellung des Lehrers gefunden haben. Somit sieht der Lehrer auf einen Blick, wann er mit dem Unterricht fortfahren kann. So kann, zum Beispiel bei mengenhaften Aussagen, jeder Schüler seine Antwort durch das Anzeigen der entsprechenden Fingeranzahl angeben. Jeder sieht, was die anderen geäußert haben.

Ortskodierung

Ein gutes Beispiel der nonverbalen Kommunikation bildet die Ortskodierung des Raumes als Abfragetechnik. Dabei werden zu gegebener Fragestellung verschiedene Antwortmöglichkeiten unterschiedlichen Ecken oder prägnanten Plätzen im Klassenzimmer zugewiesen. Die Schüler sollen sich daraufhin an die Stelle begeben, bei der sie glauben, dass es sich um die richtige Antwort handelt.

Bewegung/Stillstand

Das Klassenzimmer wird räumlich so aufgeteilt, dass verschiedenen Bereichen unterschiedliche Aussagen zugeordnet werden. Der Lehrer erkennt, dass sich alle Schüler für eine Antwort entschieden haben, wenn sich niemand mehr durch das Klassenzimmer bewegt und jeder an einer der vorgegebenen Stellen steht.

Abfragen über das Material als neue Methode der nonverbalen Kommunikation
Die Schüler sollen mit Hilfe von materiellen Gegenständen (beispielsweise Münzen, Knete, Streichhölzer etc.) eine vom Lehrer gestellte Aufgabe lösen, indem sie das zur Verfügung stehende Material auf bestimmte Weise anordnen oder verformen.

Dabei kann der Lehrer auf Distanz sehen, wer das Problem richtig gelöst hat und abschätzen, wie viel Zeit die einzelnen Schülergruppen benötigen.

3.2 Nonverbale Kommunikation durch Ortskodierung

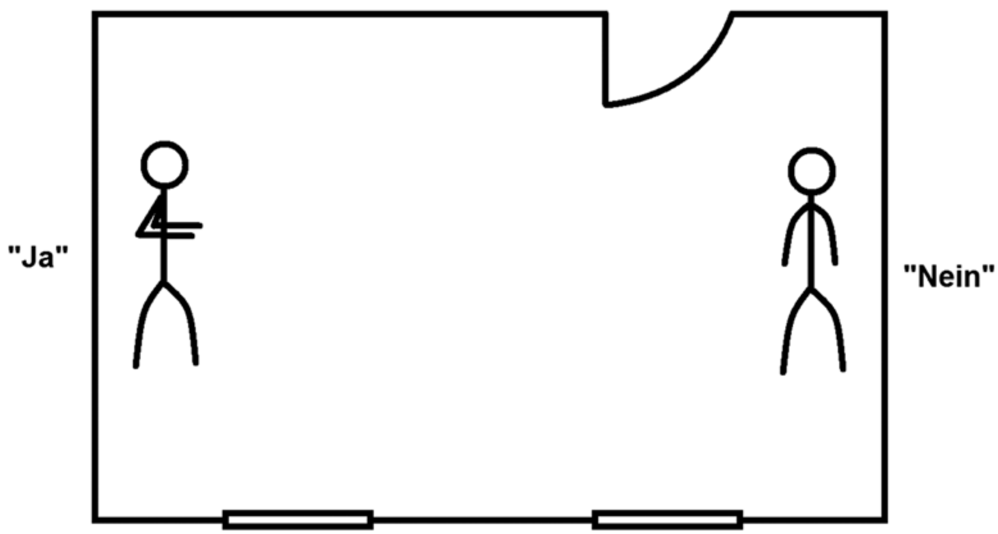
Lisa Müller, Oleg Orlov, Marie Göller und Franziska Haußer

Im Raum werden Plätze mit verschiedenen Antworten auf die zu diskutierende Frage belegt.

Konkrete Umsetzung

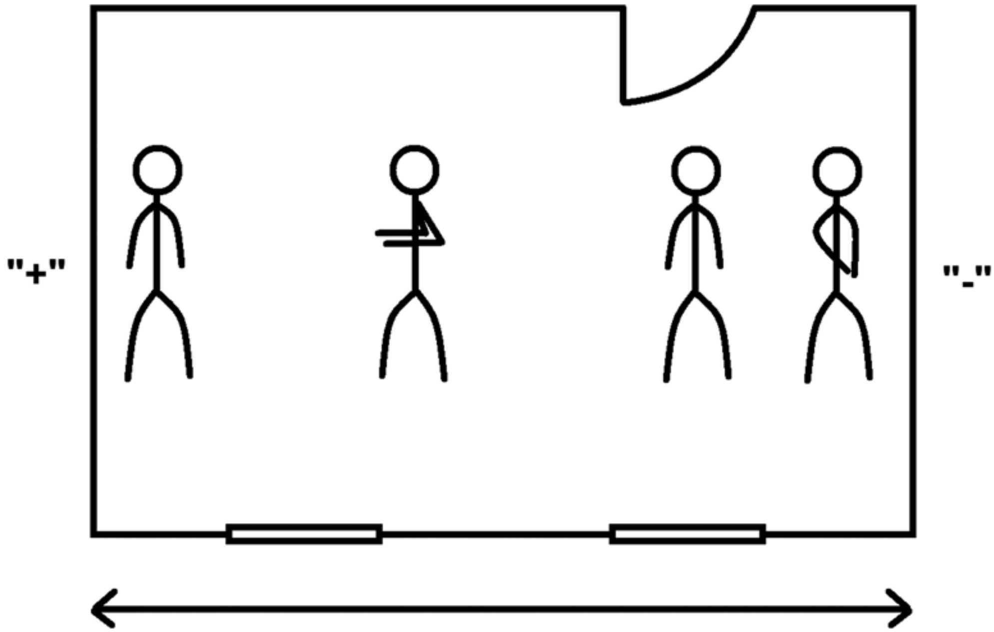
Die Belegung kann verbal oder nonverbal mit geeigneten Schildern, Plakaten oder passenden Gegenständen erfolgen. Mithilfe der Positionierung der Schüler im Raum kann es eine Diskussion geben. An dieser Stelle ist ein Redestab (z. B. ein trockener Tafelschwamm) von Vorteil: lediglich derjenige, der den Redestab in der Hand hält, darf sprechen.

Polarisierte Aufstellung – „Ja oder Nein Frage“



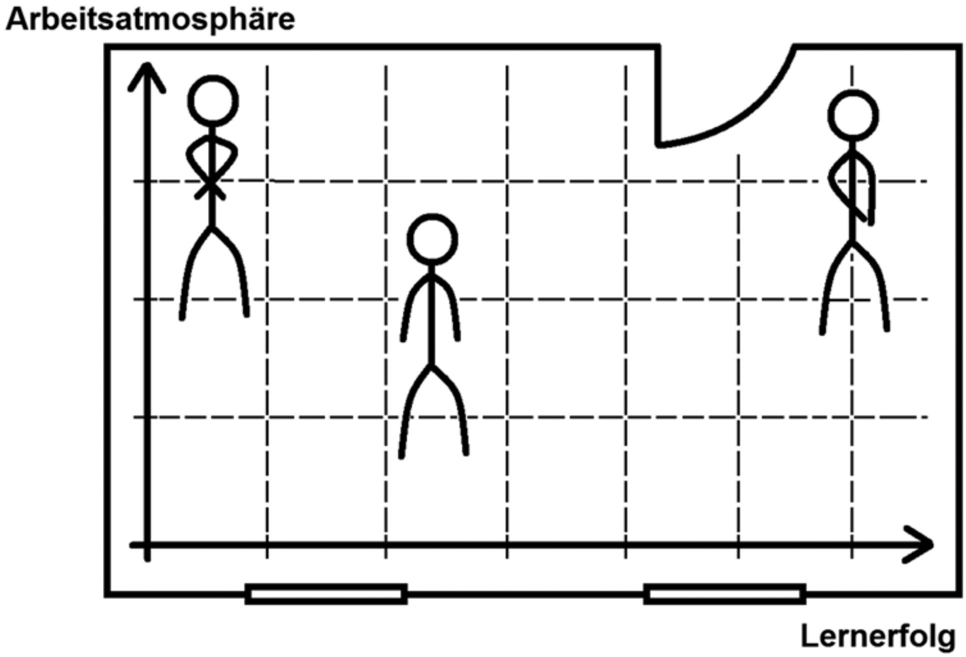
„Ist in diesem Lösungsweg ein Fehler versteckt?“. Alle Schüler, die der Meinung sind, dass es einen Fehler gibt, positionieren sich in der einen Raumhälfte, die Schüler, die meinen, dass die Aufgabe richtig gelöst wurde, gehen in die gegenüberliegende Raumhälfte. Im Anschluss erklären die Schüler, warum sie dort stehen und versuchen die anderen von ihrer Position zu überzeugen. Ebenso funktioniert die polarisierte Aufstellung für Fragen, bei denen man sich auf eine eindeutige Antwort festlegen muss, z. B. „Möchtest du in der heutigen Sportstunde Fußball oder Basketball spielen?“.

Lineare Aufstellung – ein Meinungsbild



„Wie schwierig war der heutige Unterricht für dich?“. Im Gegensatz zur oben beschriebenen Variante sind bei der linearen Aufstellung Abschwächungen in der Antwort möglich. Die Schüler sollen den Platz im Raum finden, der gemäß der Raumkodierung ihrer Ansicht entspricht. Das kann an den Polen selbst oder auch irgendwo zwischen ihnen sein. Je näher der Schüler an einem Pol steht, desto eher stimmt er dieser Antwort zu.

Aufstellung mittels Koordinatensystem



Diese Aufstellung kann z. B. als Kurzrückmeldung am Ende einer Unterrichtseinheit verwendet werden, indem sich die Schüler in einem (imaginären) Koordinatensystem mit den Achsen „Arbeitsatmosphäre" und „Lernerfolg" positionieren.[10]

Hintergründe

Nonverbale Kommunikation

Diese Art der Raumkodierung ist ein Beispiel für nonverbale Kommunikation im Unterricht. Es müssen nicht zunächst alle Schüler nacheinander zu Wort kommen, damit der Lehrer oder auch die anderen Schüler einen Überblick über die Standpunkte der einzelnen bezüglich der gegebenen Fragestellung bekommen. Hier kann zur Vermeidung gegenseitiger Beeinflussung die bereits bekannte Methode des „Arme Verschränkens" angewandt werden.

Innere Pluralität

Wir haben zu fast jedem Thema verschiedene, teils widersprüchliche Stimmen in uns. Beispielsweise bei der Frage, ob man einem Bettler auf der Straße nun etwas

10 Vgl. Kramer, Martin (2008): *Schule ist Theater. Theatrale Methoden als Grundlage des Unterrichtens*. Baltmannsweiler: Schneider, S.44.

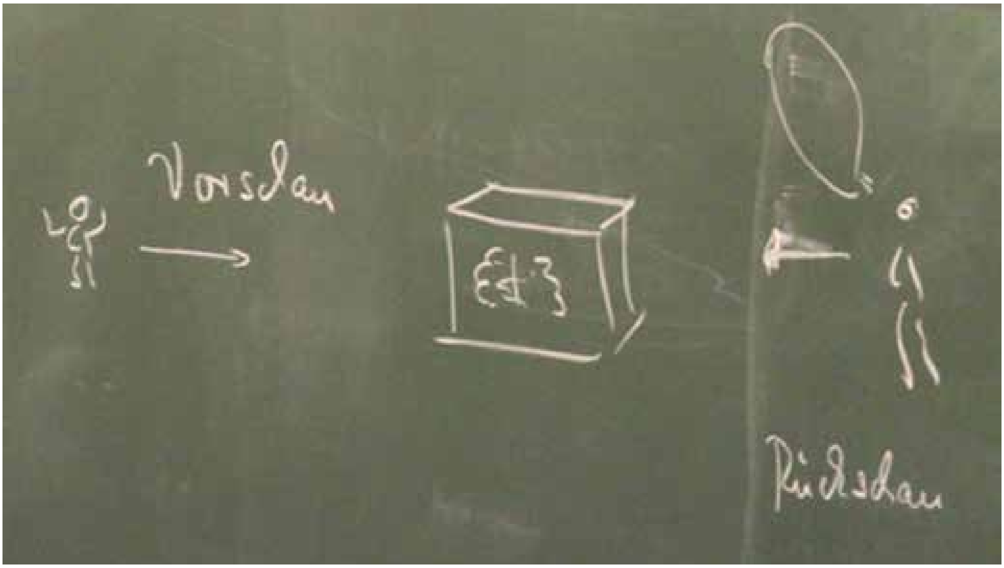
Geld geben sollte oder nicht, stellen wir fest „zwei Seelen, ach!“[11] schlagen in unserer Brust. Vor diesem Hintergrund kann eine lineare Aufstellung sehr wertvoll für die Meinungsfindung eines Schülers sein. Er positioniert sich zunächst irgendwo zwischen den Polen. Je nachdem auf welche Stimme er hört, ändert er eventuell nochmals seine Position im Raum. Trotzdem hat jede Stimme ihre Daseinsberechtigung.

Systemische Therapie – Schule ist kein Ort für Hobbypsychologen
Die dargestellte Methode wird häufig in der Familientherapie verwendet. Hier wird darauf geachtet, dass keine Beziehungsfragen gestellt werden. Der Leser hüte sich davor in die Rolle eines Therapeuten zu schlüpfen.

3.3 Ein Brief an sich selbst

Britta Tho Pesch und Markus Herm

Während der Lehrer das Unterrichtsgeschehen unter dem Gesichtspunkt der weiteren Schullaufbahn in einer rückschauenden Art und Weise betrachtet, beurteilt der Schüler die Situation aus seiner jetzigen Wirklichkeit, in einer vorschauenden Art und Weise, heraus. Was zunächst als nervig oder überflüssig wahrgenommen wird, kann sich rückblickend als sehr hilfreich herausstellen.



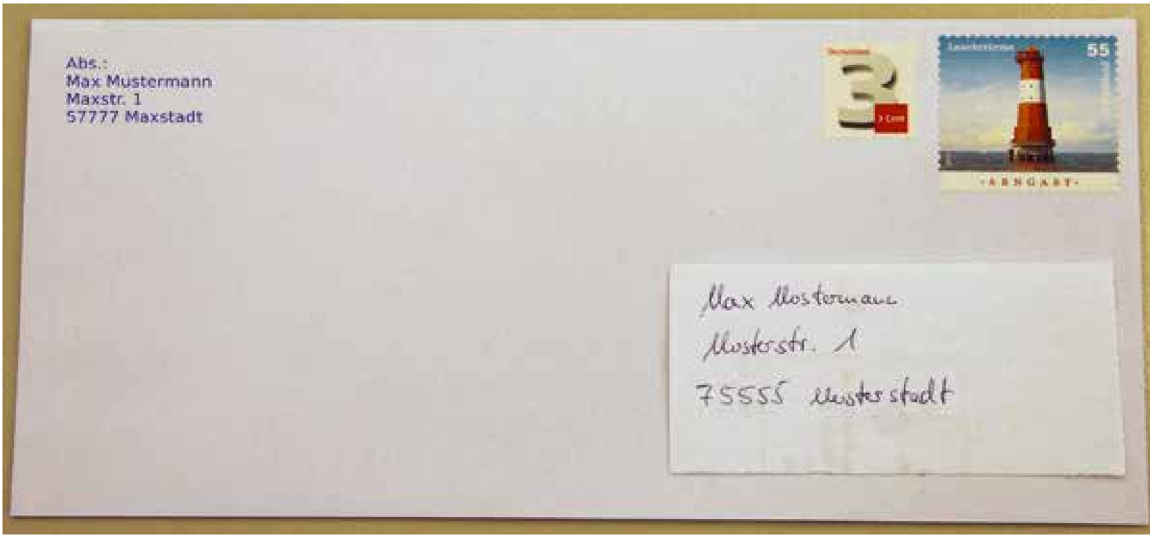
11 Zit. nach Schulz von Thun, Friedemann (2011): *Miteinander Reden 3 Das „Innere Team“ und situationsgerechte Kommunikation.* Hamburg: Rowohlt.

Es ist oft schwierig, die eigene Entwicklung richtig einzuschätzen. Einen Brief an sein zukünftiges Ich zu schreiben bietet die Möglichkeit, sich zu einem späteren Zeitpunkt mit seinen eigenen Erwartungen zu vergleichen.

Konkrete Umsetzung

Jeder Schüler braucht Briefpapier, einen Umschlag und eventuell auch Briefmarken, falls der Brief per Post geschickt werden soll. Anschließend wird den Schülern Zeit gegeben um den Brief zu beginnen. Je nachdem, wie viel Zeit zur Verfügung steht, kann der Brief auch zu Hause beendet werden. Er ist dann in der nächsten Stunde wieder mitzubringen.

Zu einem späteren Zeitpunkt bekommen die Schüler ihre Briefe vom Lehrer oder per Post zurück. Je später dies ist, desto effektiver wirkt die Methode.



Das Angeben einer zweiten Adresse (z. B. als Absender im linken oberen Eck) erhöht die Wahrscheinlichkeit, dass einen der Brief auf dem Postweg erreicht, falls man beispielsweise umgezogen ist.

Hintergründe

Vergleich mit eigenen Erwartungen

Durch das Lesen des Briefes erinnert man sich an die Erwartungen, die man früher hatte und kann diese mit dem eigenen, aktuellen Stand vergleichen. Man erkennt, welche seiner Ziele man erreicht hat und wovon man eventuell immer noch weit entfernt ist. Dies kann einem dann als Orientierungshilfe dienen, was sich noch verbessern oder verändern sollte.

Anfangen im Unterricht

Es ist besser mit dem Schreiben des Briefs schon im Unterricht zu beginnen, da man sich dort in einer anderen Atmosphäre als daheim befindet. So wird angeregt, dass auch schulische Themen (um die es dem Lehrer hauptsächlich geht) im Text Platz finden. Zuhause werden wahrscheinlich eher private Themen im Brief behandelt werden.

Persönliches Briefpapier

Falls ein Schüler persönliches Briefpapier besitzt, sollte er dies benutzen. Es kann auch weißes Papier genommen werden, aber wenn persönliches Briefpapier verwendet wird, verstärkt dies den Effekt, dass man den Brief als etwas Eigenes, von sich Kommendes, empfindet. Das Briefpapier wird zum Informationsträger. Durch den persönlichen Bezug ist die Information stärker.

Kommunikation mit sich selbst

Der Brief ermöglicht einem später mit seinem früheren Ich zu kommunizieren. Eventuelle Differenzen zwischen dem im Brief Beschriebenen und der tatsächlichen Situation können als Kritik wahrgenommen werden. Da diese aber von einem selbst kommt, hat sie eine ganz andere Wirkung. Die eigene Kritik wird besser aufgenommen und hat damit einen konstruktiven Effekt. Die aktuelle Überzeugung wird mit dem Ich aus der Vergangenheit vergleichen. Diese Konfrontation kann zur Persönlichkeitsentwicklung beitragen.

3.4 Wie kommt Wissen ins Gehirn?

Rita Steinke und Oliver Boness

Nürnberger Trichter

Bei diesem Konzept wird versucht, das Wissen durch „Berieselung“ bzw. stures Pauken zu vermitteln. Beispiele sind nach M. Spitzer: „Kassetten für das Lernen im Schlaf“ und „Lernprogramme für das sehr rasche Lesen (ein Buch in einer Stunde).[12]

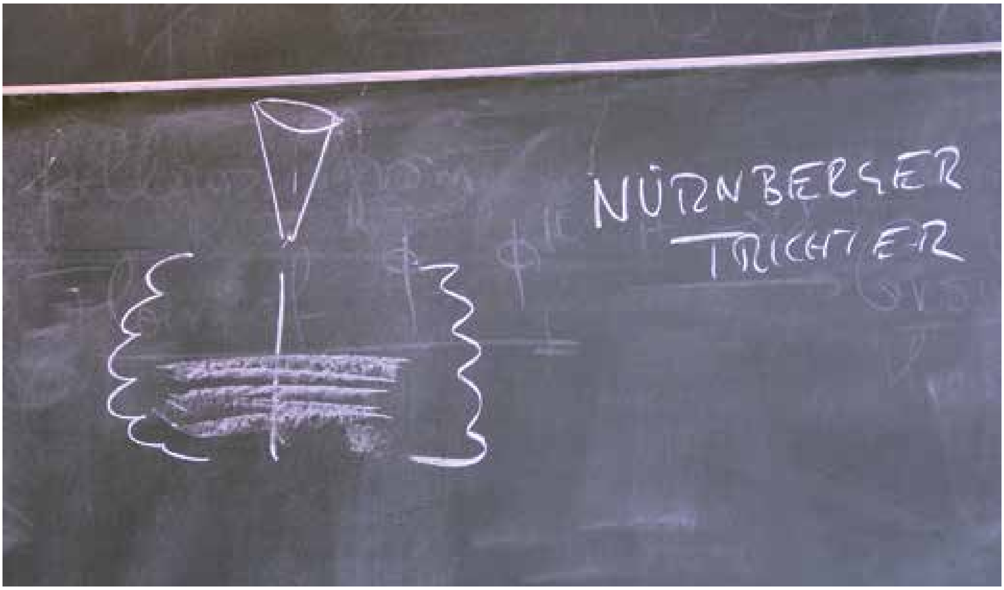
Dabei wird das Lernen als ein passiver Vorgang[13] gedeutet, wobei man sich ausschließlich auf die Vermittlung des Wissens konzentriert. Die Verarbeitung des Wissens kommt hierbei zu kurz.

Es besteht die Gefahr von defizitorientiertem Lernen, da eher die Schwächen als die Stärken im Vordergrund stehen.

---

12 Spitzer, Manfred: Lernen. Gehirnforschung und die Schule des Lebens, S. 1. Spektrum Akademischer Verlag, 2002, ISBN 3827413966

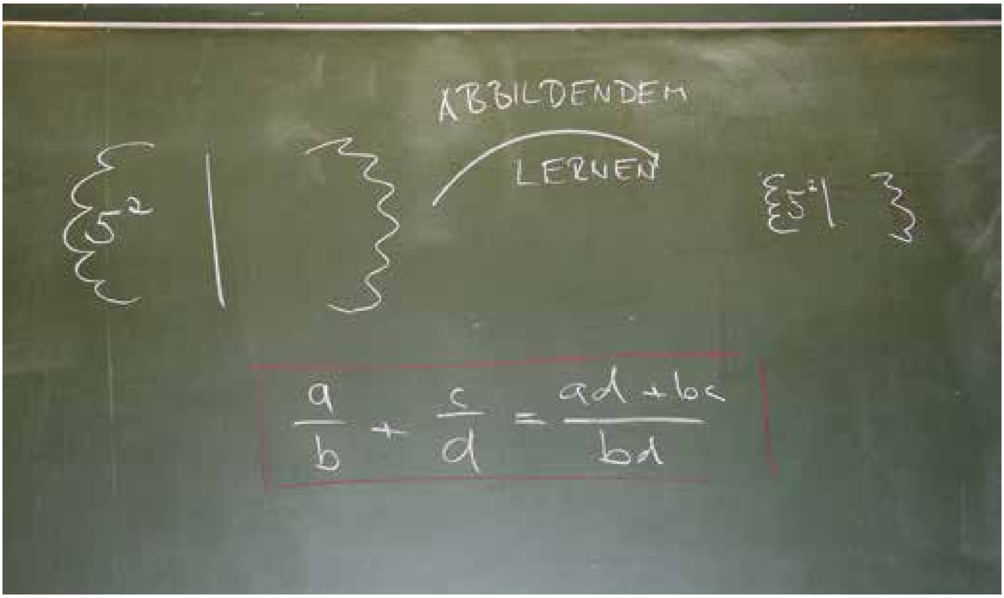
13 Ebd., S. 2.



Abbildendes Lernen

Unter „Abbildendem Lernen" versteht man den Versuch, Inhalte des Lehrerwissens 1:1 auf den Schüler abzubilden. Dazu gibt der Lehrer fertige Konzepte vor.

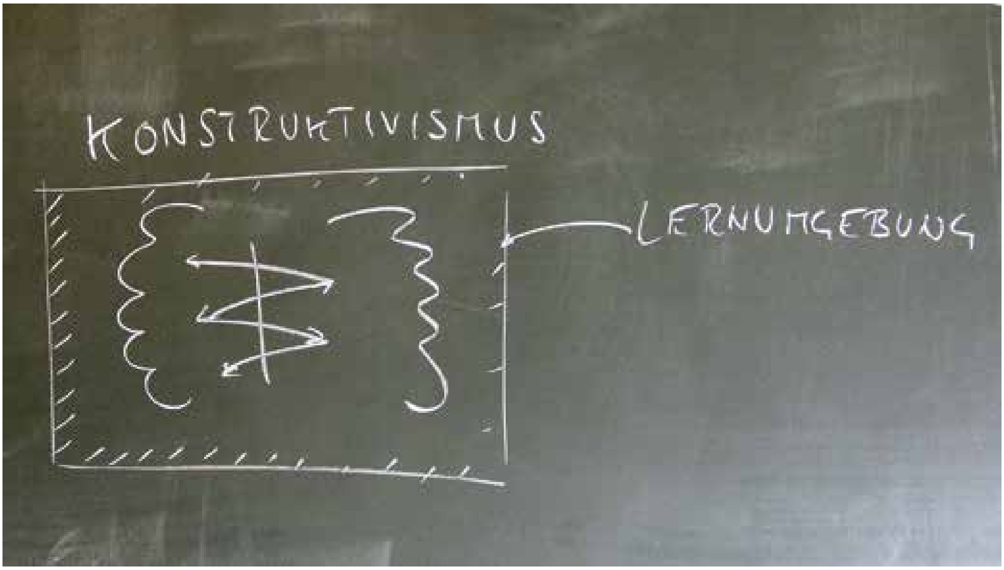
Hierbei handelt es sich um explizites Wissen, was bedeutet, dass das Wissen sprunghaft erweitert wird.



Konstruktivismus

Das Konzept „Konstruktivismus“ kann als effektives Lernen durch Beispiele bezeichnet werden.

Durch diese kann sich jeder Schüler eine eigene mathematische Welt konstruieren. Das Lernergebnis ist ein implizites Können, das heißt die Schüler haben langsam und stetig gelernt und somit ihr Können selbständig aufgebaut.



Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Konzepte „Nürnberger Trichter“ und „Abbildendes Lernen“ mittlerweile als veraltet und überholt gelten.

„Kontruktivismus“ ist eine moderne Art der Wissensvermittlung oder besser gesagt Wissensaneignung. „Hätten wir die Muttersprache in all ihrer Komplexität auf dem Gymnasium lernen müssen, würden die meisten von uns bis heute wahrscheinlich eher stammeln als sprechen.“[14]

Für Lehrer, die nach dem Konzept „Nürnberger Trichter“ unterrichten, ist es schwer auf die Ebene des Konstruktivismus zu wechseln, da ein großer Rollenwechsel vom Beschuler zum Strukturgeber vollzogen werden muss. Anstatt alles vorzugeben, muss der Lehrer nun eine geeignete Lernumgebung schaffen und die Kinder dabei begleiten, sich Dinge selbst anzueignen.

14 Spitzer, Manfred: Lernen. Gehirnforschung und die Schule des Lebens, S. 69. Spektrum Akademischer Verlag, 2002, ISBN 3827413966

3.5 Feedback

Ankatrin Kirchner

Definition

Unter Feedback versteht man ganz allgemein die Rückmeldung von Informationen.

Die Feedback-Technik dient dazu, anderen zu sagen, wie ich sie sehe und zu erfahren, wie andere mich sehen. Sie hat zwei Komponenten: das Feedback-Geben und das Feedback-Nehmen.

Mögliche Umsetzung

Der Lehrer fragt die Schüler, was sie vom Unterricht erwarten, was man verbessern könnte und was sie sich wünschen. Jeder soll dies für sich überlegen und wenn es für ihn klar ist, die Arme verschränken. Dies ist eine einfach Möglichkeit für den Lehrer, um zu wissen, wann die Schüler fertig sind. Wenn alle Arme verschränkt sind, können diejenigen, die es wollen, ihre Wünsche äußern. Der Lehrer schreibt unterdessen mit.

Hintergründe

Wertschätzung durch den Lehrer

Durch Aufschreiben der Wünsche zeigt man als Lehrer die Wertschätzung der Schülerwünsche. Das Ganze ist als Vertrag anzusehen, der zwischen dem Lehrer und den Schülern geschlossen wird.

Feedback-Regeln

Damit Feedback sinnvoll funktioniert, gibt es sowohl für die Feedback-Geber als auch für die Feedback-Nehmer einige wichtige Regeln.

Feedback-Geber

Das Feedback sollte...

- nur gegeben werden, wenn der Feedback-Nehmer dazu bereit ist.
- konstruktiv sein.
- so zeitnah wie möglich gegeben werden und auf konkrete Situationen Bezug nehmen.
- sachlich sein. Bewertungen und Interpretationen gehören nicht in ein Feedback.
- konkret sein. Verallgemeinerungen und pauschale Aussagen können dem Betreffenden nicht helfen, die Probleme zu beseitigen. Ein Feedback ist am einfachsten nachvollziehbar, wenn man ein Ereignis konkret beschreibt.
- subjektiv formuliert sein. Man spricht von eigenen Beobachtungen und Eindrücken.

- derart sein, dass man auch die positiven Seiten sieht und darlegt. Dann ist es für den Betroffenen leichter, Verbesserungsvorschläge zu akzeptieren.

Der Feedback-Nehmer sollte...
- aufmerksam zuhören.
- sich nicht verteidigen und rechtfertigen.
- nachfragen, wenn er nicht versteht, was der andere ihm sagen will.
- sich nach dem Feedback dafür bedanken.
- erkennen, dass das Feedback eine Chance ist, zu erfahren, wie man auf andere wirkt und seine eigene Persönlichkeit weiter zu entwickeln. Hierfür sollte man dankbar sein.
- in Ruhe für sich überlegen, was er aus dem Feedback macht. [15]

3.6 Rückmeldung nach einer Klassenarbeit

Jan Staib und Martin Kramer

Nach Abgabe der Klassenarbeit kann ohne großen Aufwand eine Rückmeldung für alle sichtbar an der Tafel eingeholt werden.

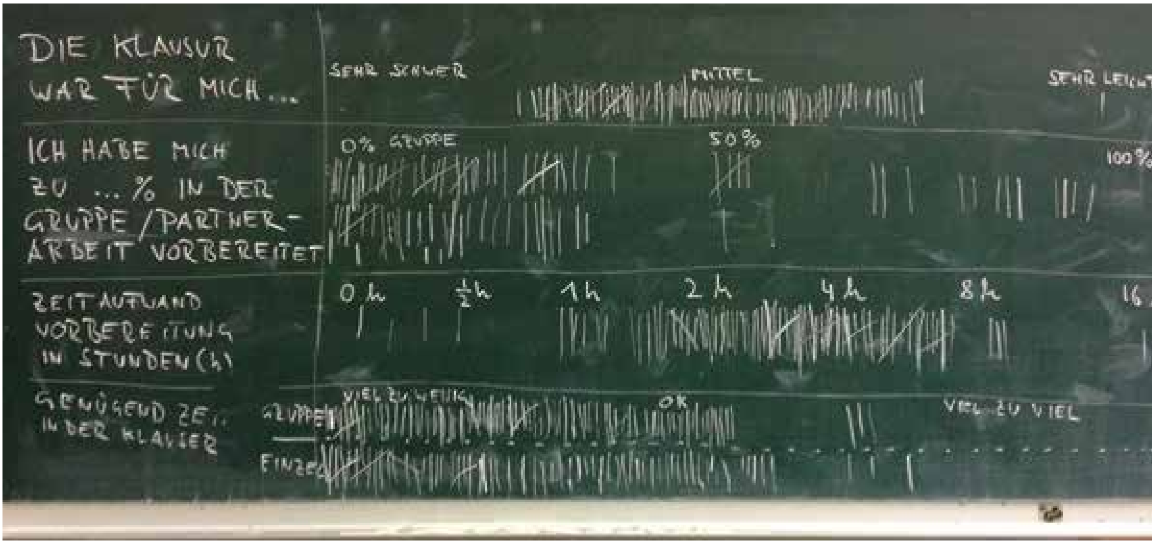
In Form einer Tabelle können mehrere Dinge erfragt werden. Die Bilder sind selbsterklärend. Wundern Sie sich nicht, dass in Klausuren ein Zeitmanko postuliert und der Schwierigkeitsgrad als zu hoch angesehen wird. Das ist ganz normal.

Hintergründe

Gegenseitige Kommunikation

Die Schüler machen gerne „Striche“. Zuvor schrieben sie ja eine Klausur mit fremdentwickelten Aufgaben. Der Lehrer kommuniziert zuerst über die Aufgabenstellungen zu den Schülern. Im Anschluß darf jeder seine individuelle Rückmeldung an den Lehrer (oder die Klassenarbeit) geben.

15 1http://arbeitsblaetter.stangl-taller.at/KOMMUNIKATION/Feedbackgeben.shtml Datum: 27.11.2012, Uhrzeit: 18:47, Letzter Aufruf: 27.11.2012



Miteinander Reden

Ein Feedback kann klärende Gespräche ermöglichen. Klaffen beispielsweise Schülervorstellungen von denen des Lehres weit auseinander, kann auf einer Metaebene über Unterricht gesprochen werden. Die Rückmeldung im Beispiel sollte nicht so verstanden werden, dass der Lehrer nächstes Mal das doppelte an Zeit zu geben hat. Viel wichtiger ist die Klärung, wie Unterricht und Klassenarbeit stimmig zueinander stehen sollen. Es ist erstaunlich, wie kooperativ sich Schüler zeigen, wenn sie mitgestalten dürfen.

Ein wichtiger Hinweis: Klar ist, dass Sie als Lehrer entscheiden, wie die nächste Klausur gestellt wird. Wichtig für ein konstrutives und kooperatives Arbeiten ist, dass der Schüler die Aufgabenstellungen nachvollziehen kann und sich nicht einfach der Lehrermacht ausgeliefert fühlt. Hier sind demokratische Mehrheitsentscheidungen fehl am Platz. Die Beziehung zwischen Schüler und Lehrer ist nicht symmetrisch.[16] Sie haben einen Erziehungsauftrag – nicht der Schüler. Sie sind der Lehrer!

Ankerprinzip

Der erste Schüler, der seine Striche setzt, wirft einen „Anker“, an dem sich alle folgenden Einträge orientieren – ob man das nun möchte oder nicht. Frei entscheiden kann sich nur der, der unabhängig von irgendwelchen Vorgaben entscheiden kann.

16 Vgl. Schulz von Thun, *Miteinander Reden Bd. I,* Abschnitt 4.3, Reinbek bei Hamburg, [48]2010

3.7 Notengebung und die Gütekriterien eines Tests

Dennis Dressel und David Ruf

Ein Experiment zur Objektivität wurde durchgeführt.

Alle Studierenden haben die gleiche Klausur eines Schülers der zehnten Klasse nach eigenen Maßstäben korrigiert. Sowohl Punkteverteilung als auch Notenschlüssel wurden unterschiedlich angelegt, insgesamt waren 20 Punkte zu vergeben.

In der Vorlesung sollten die vergebenen Noten durch die ortskodierte Abfragetechnik, der Positionierung im Raum, dargestellt werden. Das Ergebnis war eine breite Streuung zwischen den Noten 2 und 4.

„Als Kontrolle des Lernfortschritts soll sie [die Notenbildung] Lehrern, Schülern, Erziehungsberechtigten [...] den erzielten Erfolg bestätigen, ihnen Hinweise für den weiteren Lernfortgang geben und damit die Motivation des Schülers fördern.“[17]

Von der Macht der Noten

Indem er einem Schüler eine Note erteilt, projiziert der Lehrer die vieldimensionale Wissens- und Gedankenwelt des Schülers auf einen Punkt einer eindimensionalen Notenskala. Ob ein Schüler gut oder schlecht, begabt oder unbegabt, fleißig oder faul ist, scheint dann leicht ablesbar zu sein.

Noten bestimmen den schulischen Alltag. Während gute Noten als Repräsentanten guter Leistungen stehen und dem Schüler Tür und Tor zu allgemeiner Anerkennung und dem Studienplatz seiner Wahl öffnen, gilt ein Schüler mit schlechten Noten als weniger intelligent, weniger leistungsstark und faul.

17 Verordnung des Kultusministeriums über die Notenbildung , Notenbildungsverordnung siehe unter http://www.landesrecht-bw.de

Es besteht die Gefahr, dass Noten das Denken und Handeln von Schülern und deren Eltern, Studenten sowie von Lehrern und Bildungsinstitutionen stark beeinflussen.

Es geht um Noten, nicht ums Fach?

In der Praxis scheinen Noten den Schüler nur selten zu größerem Interesse am Fach zu motivieren. Vielmehr konditioniert die Notengebung darauf, nicht aus eigenem Interesse, sondern in Hinblick auf punktuelle Leistungsfeststellung zu lernen. Misserfolge werden dem Schüler durch schlechte Noten bescheinigt und spornen ihn höchstens dazu an, auf die nächste Klausur mehr zu lernen – nicht aber, sich mehr für dieses Fach zu interessieren oder ein tieferes Verständnis anzustreben.

Durch die allgemeine Anerkennung der Schulnote als Leistungsfeststellung hat der Schüler das Gefühl, seine Kompetenz in einem Fach werde tatsächlich durch eine entsprechende Note abgebildet. Schnell etabliert sich innerhalb einer Klasse ein notenbestimmtes Leistungsgefälle heraus, welches weder von Schülern noch von Lehrern hinterfragt wird. Die fremdbestimmte Positionierung des Schülers innerhalb dieses Gefälles wird schnell zu dessen vermeintlicher Selbstwahrnehmung, welche – insofern er sie akzeptiert – selten motivierend wirkt.

Gütekriterien zur Leistungsfeststellung

Validität	„Inwieweit misst das Testinstrument das, was es messen soll?“ – Es soll sichergestellt werden, dass die Ergebnisse einer Prüfung tatsächlich eine gültige und nachvollziehbare Schlussfolgerung über das Wissen des Schülers darstellen.
Reliabilität	Ein Test soll wiederholbar sein, also unter vergleichbaren Bedingungen zu vergleichbaren Ergebnissen führen und somit eine gewisse Zuverlässigkeit gewährleisten.
Objektivität	Objektivität soll sicherstellen, dass das Testergebnis unabhängig von den Vorlieben und Fähigkeiten des Test-Durchführers ist und, dass das Zustandekommen jedes einzelnen Testergebnisses methodisch erklärt werden kann und für Andere nachvollziehbar ist.

Vom Streben nach Objektivität

Betrachtet man die breite Streuung der vergebenen Noten in der Vorlesung, so scheinen hier verschiedene Wirklichkeiten aufeinanderzuprallen.

Im Folgenden soll zum Hinterfragen der Notengebung angeregt werden.

Ist Objektivität möglich?

Wird Objektivität in der Praxis nicht immer nur durch das Zusammenspiel mehrerer Subjektivitäten angenähert?

Kann ein Lehrer durch Notengebung anhand festgelegter Kriterien seine eigene subjektive Sichtweise durch eine objektive ersetzen?

Steht das Kriterium der Objektivität nicht in einem starken Kontrast zur Forderung des Schülers nach individueller und pädagogisch sinnvoller Bewertung?

Ist Objektivität überhaupt wünschenswert?

3.8 Dominospiel – eine Abfragetechnik

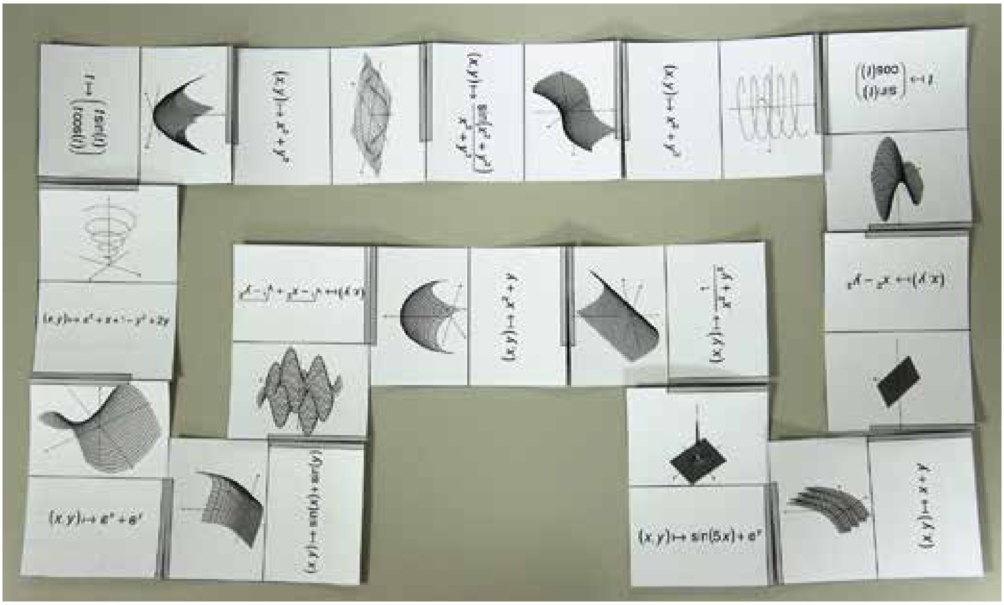
Anne-Sophie Eble, Sandra Schmidt und Andreas Claessens

Bei dieser Übung wird spielerisch eine Wissenssicherung und Lernkontrolle durchgeführt. Das Thema hierfür kann je nach Klassenstufe und Lerneinheit frei gewählt werden.

Konkrete Umsetzung

Material und Vorbereitung

Zum ausgewählten Thema wird ein Dominospiel (etwa 15–25 Kärtchen) entworfen, dessen korrekte Ausführung eine Lösungsfigur ergibt.



An die markierten Kanten wird angelegt, damit die Karten am Ende eine Figur und nicht einfach nur eine lange Reihe ergeben.

Durchführung

Es werden 3 Phasen unterschieden.

- Gruppenphase

Die Schüler kommen in den Farbgruppen zusammen. Jede Gruppe bekommt ein Dominospiel. Die Aufgabe der Gruppen ist es, gemeinsam passende Kärtchen zuzuordnen und die Lösungsfigur zu erhalten.

- Zwischen Gruppe und Individuum

Die Kärtchen werden gemischt und wie bei einem Kartenspiel an die Gruppenmitglieder ausgeteilt. Eine Karte wird als Anfangskarte in die Mitte gelegt. Auch hier ist das Ziel wieder die Lösungsfigur, jeder spielt aber für sich alleine.

- Individuum

Die Schüler bekommen die Hausaufgabe, das Dominospiel zu Hause alleine richtig aufzukleben.

Hintergrund

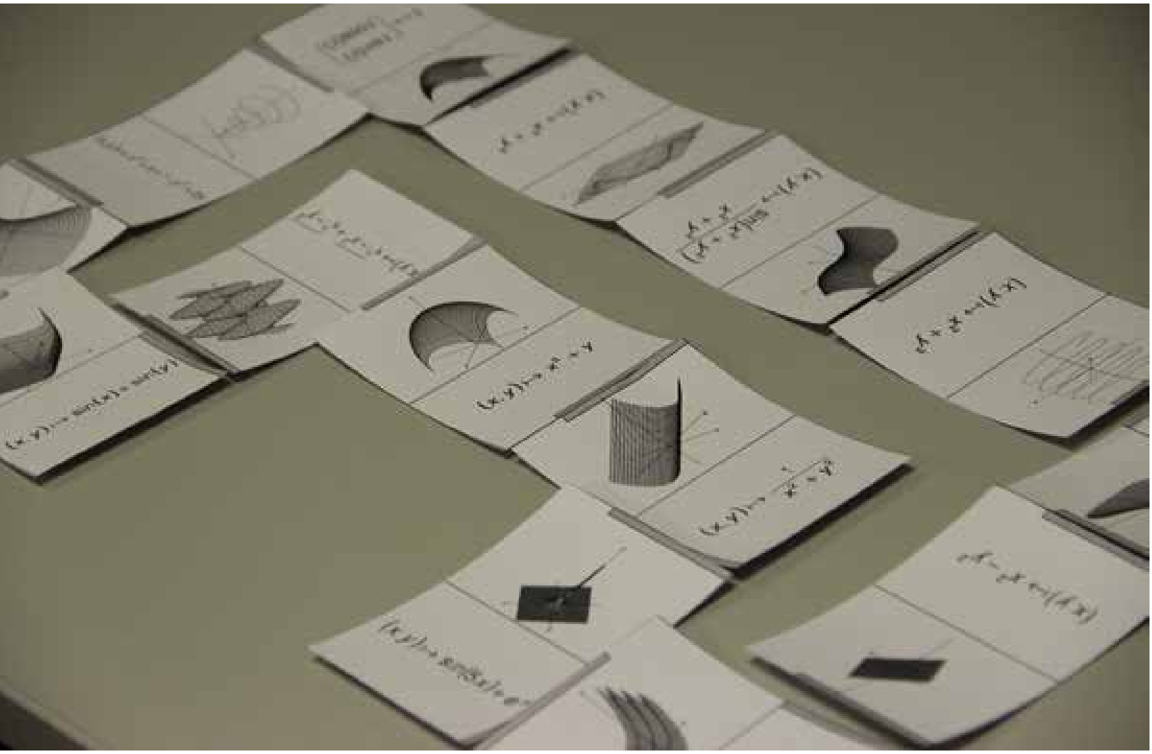
Wir-Du-Ich

Hier wird nochmals die bereits erklärte Sandwichmethode, auch bekannt unter dem Namen „Ich-Du-Wir“ oder „Think-Pair-Share“ aufgegriffen. Allerdings wird nun das Prinzip rückwärts durchlaufen. Zunächst wird die Lösung, wie beschrieben, in Kleingruppen erarbeitet. Anschließend spielen die Schüler für sich alleine, können aber ihre Farbgruppe trotzdem um Hilfe fragen, wenn sie nicht weiter wissen. Dadurch wird erreicht, dass sich jeder mit der Aufgabe befasst und mit einbezogen wird. In der dritten Phase sind die Schüler ganz auf sich allein gestellt. Somit ist sichergestellt, dass jeder die Aufgabe beherrscht und dieses Wissen eventuell auch in der Klausur anwenden kann.

Es wird also vom Lösen eines Problems in der Gruppe übergegangen zur individuellen Lösungserarbeitung.

Verbalisieren von Mathematik

In der ersten Phase versucht die Gruppe, die Lösung gemeinsam zu erarbeiten. Jeder kann mitreden und sich einbringen. Die Schüler lernen hierbei mathematisch zu argumentieren und miteinander zu diskutieren. Wenn eine Gruppe frühzeitig fertig ist, kann sie anderen Gruppen bei aufgetretenen Problemen helfen.



Lernen als Spiel

Die Dominoaufgabe wird eher als Spiel wahrgenommen, da man die Funktionen nicht herleitet, sondern den Schaubildern zuordnet, was mit einem Puzzlespiel assoziiert wird.

ikonisch-symbolisch

In diesem Spiel werden die symbolische und die ikonische Ebene miteinander verknüpft. Die Schüler versuchen, die Formeln zu visualisieren.

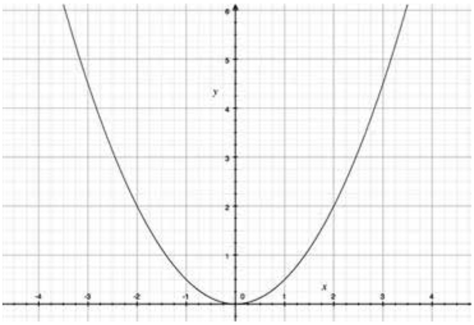
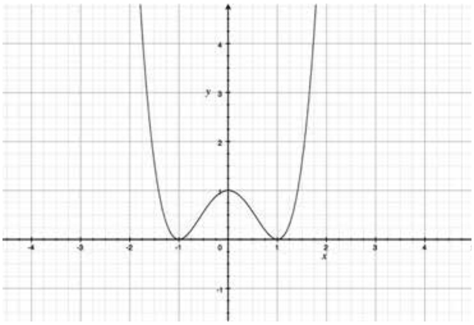
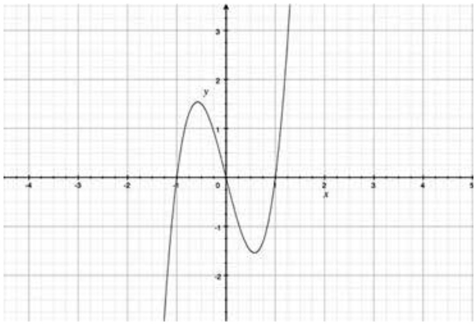
Variation mit höherem Schwierigkeitsgrad

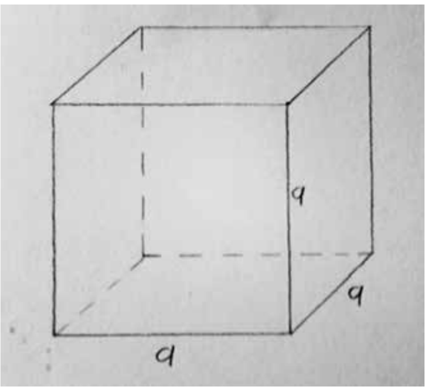
Wenn eine Karte zu viel gegeben oder eine Karte einbehalten wird, können die Schüler die Kärtchen nicht einfach irgendwie zusammenpuzzeln, sondern müssen genau herausfinden, welche Karte fehlt bzw. welche zu viel ist.

Optische Kontrolle

Für die richtige Lösung muss das richtige Muster entstehen. Der Lehrer kann die Lösung sehr schnell optisch überprüfen. Ein kurzer Blick darauf genügt, um die Lösung zu kontrollieren oder um zu sehen, wie weit eine Gruppe bereits ist.

Weitere Beispielmöglichkeiten

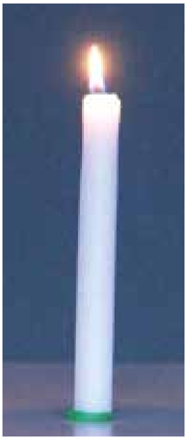
Linke Seite einer Dominokarte	Rechte Seite einer Dominokarte
Graph einer Funktion 	Funktion $f(x) = 0{,}5\ x^2$
Graph einer Funktion 	Ableitung 

Körper 	Berechnung des Volumens $V = a^3$

4 Material

4.1 Material als Bedeutungsträger

Raphael Plersch und Raphael Viol



Repräsentativ soll am Beispiel der Kerze die Bedeutung des Materials dargestellt werden.

Aufgabenstellungen über das Material sind binnendifferenziert

Das bedeutet, dass eine Aufgabe auf unterschiedliche Art und Weise gelöst werden kann. Beispielsweise nutzt man die Kerze in einer der unteren Klassenstufen, um das Volumen eines Zylinders zu berechnen.

Bei älteren Schülern könnte man bei der gleichen Aufgabe die genauere Form berechnen und mehr Wert auf Details legen, wie zum Beispiel Aufteilung in mehrere Körper oder Berücksichtigung des Dochtes.

Material ist fächerübergreifend

Die Kerze mit ihren Eigenschaften kann auch in anderen Fächern zur Demonstration verschiedener Phänomene dienen. Dazu folgende Möglichkeiten:

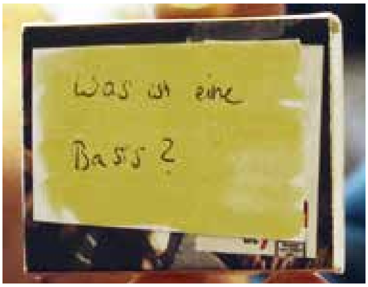
Physik	Beugung des Lichtes (Blickt man durch einen winzigen Spalt zwischen zwei Stiften, so kann man die wellenförmige Ausbreitung des Lichtes erkennen)
Chemie	Verbrennungsprozess
Kunst	Herstellen von Kerzen
Naturphänomene	Luftbewegung

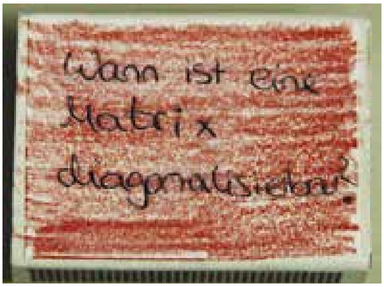
Alltagsbezug
Durch Auswahl von Gegenständen, welche die Schüler von zuhause kennen, transferiert man die Mathematik in den Alltag und macht die Thematik besser greifbar. So wird ein persönlicher Bezug geschaffen und sowohl das Interesse geweckt, als auch die Lernmotivation gesteigert.

Kerze im weiteren mathematischen Kontext
Potenzrechnung
Die Kerze verkörpert symbolisch die Sonne und man versucht, maßstabsgetreu den Abstand zur nächst gelegenen Sonne (Alpha Centauri) zu bestimmen. Wird einem klar, dass bei diesem Größenverhältnis der Abstand zur nächsten Sonne die Entfernung zwischen Freiburg und Karlsruhe beträgt, entwickelt man ein besseres Verständnis für extrem große Zahlen.
Prozentrechnung
Misst man die abgebrannte Strecke am Ende einer Stunde, kann man das Verhältnis zur Ausgangslänge prozentual bestimmen.
Volumenberechnung
Berechnung von Zylinder und Kegeln.
Lineare Funktionen
Erstellen eines Längen-Zeit-Diagrammes als Schaubild des Verbrennungsprozesses.

4.2 Streichholzschachtel als Gehirn
Patricia Epke, Julian Baier, Hannah Heinzelmann und Asya Yardimci

Konkrete Umsetzung
Vorbereitung
Als Hausaufgabe sollen die Schüler eine Streichholzschachtel mit einer Aufgabe und der dazugehörigen Lösung versehen. Dazu bekleben sie jeweils Vorder- und Rückseite. Je nach Schwierigkeitsgrad der Aufgabe wird diese in den Ampelfarben (grün = einfach, gelb = mittel, rot = schwierig) kodiert.





Das Thema kann dabei durch den Lehrer eingegrenzt werden.

Vorab sollte mit den Schülern abgesprochen werden, dass die Erledigung der Hausaufgabe Voraussetzung für die Teilnahme am Unterricht ist. Ansonsten müssen sie die Inhalte im Heft selbst erarbeiten, während die anderen die Übung durchführen.

Durchführung im Unterricht

Der Lehrer demonstriert die Übung mit einem Schüler. Dabei nimmt er die Rolle des Prüfers ein. Dazu hält er eine Streichholzschachtel (Gehirn) in der rechten Hand und leert die Streichhölzer in die linke Hand (Materiallager). Auf der Vorderseite der Streichholzschachtel befindet sich eine Aufgabe, welche er dem Schüler zeigt.

Der Schüler löst die Aufgabe im Kopf und bekommt anschließend die Rückseite der Schachtel, auf welcher die Lösung steht, gezeigt. Daraufhin wird er, entsprechend der Qualität seiner Antwort, mit Streichhölzern aus dem Materiallager des Lehrers belohnt. Bei einer sehr guten Antwort erhält er zwei Hölzer, konnte er sie nur mit Hilfe lösen, bekommt er ein Holz und sollte er gar nicht auf die Lösung kommen, so bekommt er keins oder muss sogar eins abgeben, je nach Ermessen des Prüfers.

Nun findet ein Rollenwechsel statt. Diesmal zeigt der Schüler dem Lehrer seine vorbereitete Streichholzschachtel und bewertet ebenfalls dessen Lösung. Anschließend wird die Übung unter Angabe eines Zeitlimits von etwa 15 Minuten auf die Klasse übertragen.

Die Schüler bewegen sich frei im Klassenzimmer, stellen sich ihre Aufgaben und belohnen sich gegenseitig, wobei auch der Lehrer aktiv an der Übung teilnehmen kann.

Hintergründe

Streichholzschachtel als Gehirn

Das Gehirn ist eine Metapher für die Streichholzschachtel, wobei die Streichhölzer das angesammelte Wissen darstellen.

Eigene Aufgaben

Die Schüler lernen, Aufgaben zu stellen (selbstbestimmtes Lernen).

Ende des Spiels durch nonverbale Kommunikation

Zu Beginn der Übung wird ein Zeichen vereinbart, bei dem das Spiel beendet wird. Möglichkeiten sind ein Gong, Licht an- bzw. ausschalten oder ähnliches.

Rollenwechsel

Durch den ständigen Rollenwechsel, bei dem die Schüler abwechselnd in Prüfer- und Prüflingsrolle schlüpfen, erfährt der Schüler unterschiedliche Bewertungen unabhängig vom Lehrer und lernt darüber hinaus, seine Mitschüler einzuschätzen.

Belohntes Lernen

Der Mensch ist ein Belohnungstier. Der sofortige Austausch von Streichhölzern stellt eine direkte und haptische Belohnung dar. Im Gegensatz zu Bestrafung oder Ignoranz, welche einen geringen oder gar keinen Lerneffekt hervorrufen, wird bei der Belohnung der größtmögliche Lernerfolg erzielt. Hierbei ist wichtig, dass man durchschnittlich mehr Streichhölzer erhält als einbüßt. Die Schüler haben einen erhöhten Erwartungswert.

Lernzielkontrolle

Während des gesamten Spiels findet keine Beurteilung durch den Lehrer statt. So kann jeder Schüler sein eigenes Tempo bestimmen. Am Ende der Übung hat schließlich jeder Schüler seine eigene Streichholzschachtel mit den gesammelten Streichhölzern und kann anhand dessen seinen Erfolg selbst beurteilen. Darüber hinaus vermeidet der Lehrer einen öffentlichen Leistungsvergleich.

Die Aufgabe birgt einen weiteren Vorteil für den Lehrer, da er anhand der gestellten und gelösten Aufgaben erkennt, auf welchem Wissensstand sich die Schüler befinden.

Binnendifferenzierung

Mithilfe der Farbkodierung werden die Aufgaben in drei Schwierigkeitsgrade eingeteilt. Dadurch kann jeder eine für sich passende Aufgabe wählen und es findet ein selbstständiges Arbeiten ohne Fremdbestimmung statt.

Übergang in den Alltag

Streichholzschachteln wirft man nicht weg. Somit kann die Aufgabe auch im Alltag zum Gesprächsthema werden. Beispielsweise erinnert die Schachtel beim Anzünden einer Kerze an die Übung oder führt zu einer Diskussion über das Thema, wenn jemand anderes sie entdeckt.

Algebra

5 Zahlen und Rechnen

5.1 Erste Schritte zu unseren Zahlen

Frieder Korn

Vom Zählen über die Strichliste zur Zahl

Konkrete Umsetzung

Die Schüler bilden einen Kreis um das Lehrerpult. Dann verteilt der Lehrer fünf Streichhölzer auf dem Tisch. Die Schüler werden vom Lehrer nach der Anzahl der Hölzer gefragt.

Danach erhöht der Lehrer die Anzahl der Streichhölzer um zehn. Wieder wird die Klasse gefragt, wie viele Streichhölzer sich nun auf dem Tisch befinden und ob dies auf einen Blick zu erkennen ist. Danach werden die Streichhölzer von dem Lehrer umsortiert. Er legt nun über jeweils vier Hölzer eines quer oder diagonal. Alternativ können die Hölzer zu einem „V" geformt werden. Nun stellt der Lehrer die Frage nach der besten Übersichtlichkeit der Beispiele.

Hintergründe

Warum werden fünf Hölzer zusammengefasst?

Es ist wichtig, dass der Lehrer zu Beginn der Einheit nicht mehr als sechs Hölzer wählt. Zahlen bis zur Größenordnung vier kann der Mensch erfassen, ab fünf fangen die meisten Menschen an zu zählen. Um größere Mengen oder Zahlen auf Anhieb erkennen zu können, hilft die Einführung von Symbolen.

Ortskodierung bei römischen Zahlen

Jedem Symbol wird eine spezifische Bedeutung zugeordnet. Dadurch wird ein besserer Überblick geschaffen. Dies entspricht dem Prinzip der Ortskodierung.

Die römischen Zahlen erhalten durch Ortskodierung eine weitere Struktur. Rechts und links wird unterschieden: *IV ≠ VI*.

„Null ist nicht Nichts“ – Ortskodierung bei unseren Zahlen

Unser Zahlensystem zeichnet sich durch eine noch feinere Ortskodierung als bei den obigen Symbolen aus. Ohne Ortskodierung könnten Zahlen wie 21 und 12 nicht unterschieden werden. In diesem Zusammenhang spielt vor allem die Null eine bedeutende Rolle. Erst durch die Null lassen sich alle Zahlen mit Hilfe von nur zehn Symbolen eindeutig darstellen. Sie macht es möglich, einen Unterschied zwischen den Zahlen 101 und 1001 zu machen. Einer leeren Stelle einen Namen zu geben, fordert ein hohes Maß an Abstraktionsfähigkeit.

Exponentielles Wachstum als großer Vorteil

Unser Zahlensystem beruht auf exponentiellem Wachstum. Jede beliebige Zahl lässt sich als Potenz darstellen. Dadurch lassen sich große Zahlen überhaupt darstellen.

5.2 Lernen des Einmaleins

Anja Kraus

Beim großen Einmaleins bietet sich eine tabellarische Darstellung der einzelnen Reihen an. Einige Rechenoperationen, etwa das kleine Einmaleins, müssen von den Schülern auswendig gelernt werden.

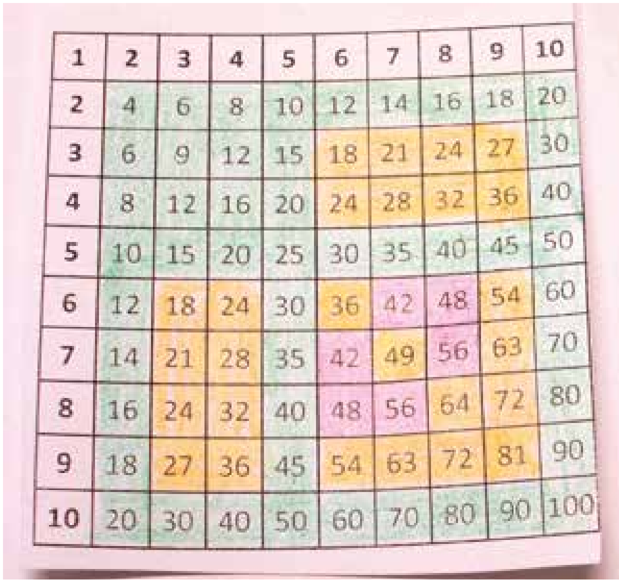
Einfärben des kleinen Einmaleins

Ziel der Übung

Die Rechenaufgaben des kleinen Einmaleins sollen von den Schülern individuell bewertet werden.

Durchführung im Unterricht

Die Schüler sollen die Tabelle des kleinen Einmaleins je nach Schwierigkeitsgrad der entsprechenden Rechenaufgabe verschieden einfärben. Dabei steht grün für leichte Aufgaben, gelb für mittelschwere und rot für schwere Rechnungen.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

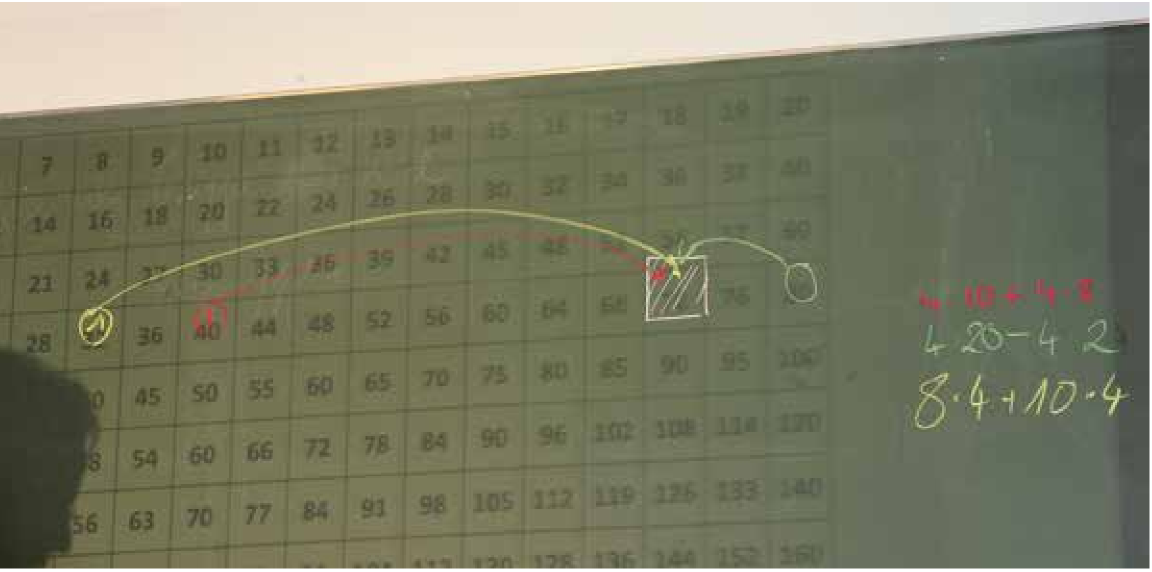
Laufwege im großen Einmaleins

Ziel der Übung

In dieser Übung sollen Rechenaufgaben im großen Einmaleins mit Hilfe der Tabelle in einfachere Teilaufgaben zerlegt werden, um auf die Lösung zu kommen.

Durchführung im Unterricht

Ein Schüler kommt an die Tafel, auf welcher die Tabelle mit Hilfe eines Tageslichtprojektors abgebildet wird, und läuft mit einem Stofftier den Weg ab, mit dem er eine Aufgabe, zum Beispiel (4 · 18) löst. Dieser Weg wird in die Tabelle eingezeichnet und daneben auf der Tafel formal aufgeschrieben (4 · 10 + 4 · 8). Verschiedene Wege werden dabei in unterschiedlichen Farben angezeichnet.



Hintergründe

Strukturiertes Lernen

Durch die Einfärbung des kleinen Einmaleins werden die Rechenaufgaben in schwere und leichte Aufgaben eingeteilt. Diese Struktur erleichtert dem Schüler das Lernen.

E-I-S-Prinzip von Bruner

Die Zerlegung von Rechenaufgaben im großen Einmaleins an der Tafel geschieht auf drei Ebenen. Zuerst wird der Weg mit dem Stofftier abgelaufen (enaktiv), dann wird der Weg in der Tabelle nachgezeichnet (ikonisch) und schließlich formal aufgeschrieben (symbolisch).

5.3 Algorithmus zum Bestimmen von Primzahlen

Ines Klopfer und Caroline Stephan

Konkrete Umsetzung

Um die Besonderheit der Primzahlen konstruktiv zu begreifen, wird den Schülern ein Arbeitsblatt mit dem Zahlenraum von 1 bis 100 ausgeteilt. Auf diesem dürfen sie nun alle Vielfachen einer Zahl wegstreichen, angefangen bei 2, dann immer die nächst größere, noch nicht gestrichene Zahl. Das Streichen kann in verschiedenen Farben erfolgen. Die übrig gebliebenen Zahlen werden als Primzahlen sichtbar.

Link: http://www.unterricht-als-abenteuer.de/download/Primzahlen%20und%20Telefonnummern.pdf

6 Unser Zahlensystem erleben

6.1 Die Einführung des Fünfersystems

Kai Hoffmann

Die Schüler erfahren unser Zahlensystem am Beispiel des Fünfersystems körperlich. Dabei wird auch auf die Problematik des Übertrags eingegangen.

Konkrete Umsetzung

Die Schüler stellen sich im Kreis vor der Tafel auf. Der Lehrer markiert vier gleichgroße Quadrate hintereinander mit Klebeband auf den Boden. Sie symbolisieren die ersten vier Stellen des Fünfersystems. Vier freiwillige Schüler stellen sich nacheinander in das aus ihrer Sicht rechte Feld, das mit der Potenz 5^0 belegt ist und halten einen Daumen nach oben. Der Lehrer zählt dabei laut mit: Eins, Zwei, Drei, Vier. Ein fünfter Schüler kommt mit erhobenem Daumen hinzu.

Die vier Schüler mit erhobenem Daumen repräsentieren die Zahl Vier im Fünfersystem. Kommt ein weiterer Schüler mit erhobenem Daumen dazu, streicht er die Finger der anderen Schüler im Feld ab und hält nun die ganze Hand in die Höhe. Die anderen Schüler müssen das Feld dabei verlassen, da es die Ziffer Fünf im Fünfer-System nicht gibt. Springt er ins nächste Feld, sollten die Schüler erkennen, dass wieder nur ein Finger in die Höhe gehalten werden darf, denn auf dieser Stelle ist ein Finger der fünffache Wert. Ein Sprung von einem Feld ins nächste entspricht somit jeweils der Erhöhung des Exponenten der Fünferpotenz um eins.

Hintergründe

Warum andere Zahlensysteme?

Das Fünfersystem wurde hier stellvertretend für jedes andere, gleichwertige Ziffernsystem gewählt. Das Hauptaugenmerk dieser Aufgabe liegt darauf, dass sich die Schüler mit einem Ziffernsystem auseinandersetzen, das ihnen nicht seit Beginn ihres Schullebens bekannt ist. Ziel ist es, durch das Erlernen weiterer Systeme das bekannte Zehnersystem besser verstehen zu können.

6.2 Die Zahl 2012 im Fünfersystem darstellen

Felicia Zeiser

Konkrete Umsetzung

Die Zahl 2012 soll von den Schülern im Fünfersystem dargestellt werden. Der Lehrer nutzt dazu die vier aufgeklebten Quadrate aus der vorhergehenden Übung. Die Felder symbolisieren die Potenzen 5^0, 5^1, 5^2, 5^3. Dann teilt er die Klasse in zwei Hälften. Der einen Hälfte erteilt der Lehrer die Aufgabe, die Zahl 2012 im Fünfersystem darzustellen. Dazu verteilen sich die Schüler in ausreichender Anzahl in die Felder. Die andere Hälfte der Klasse fungiert als Kontrollgruppe und erhält die Anweisung, zu klatschen, sobald ein korrektes Ergebnis gefunden wurde. Anschließend wechselt die Aufgabenverteilung. Der Lehrer zeichnet während der Übung zusätzlich vier Quadrate an die Tafel, mit Hilfe derer er den aktuellen Ergebnisstand festhält.

Hintergründe

Transferfähigkeit der Gruppen

Die Schüler müssen fähig sein, die Zahl 2012 vom Zehnersystem ins Fünfersystem zu transferieren. Um die Zahl auf die zuvor erklärte Weise darzustellen, ist ein fünftes Feld nötig. Dieses Feld symbolisiert die Potenz 5^4. Erst mit diesem Schritt zeigt sich, ob die Schüler das Prinzip des Fünfersystems tatsächlich verstanden haben.

Diese Transferfähigkeit muss in der Übung in gleichem Maße von der Kontrollgruppe erbracht werden. Auch sie muss das zu Grunde liegende Prinzip verstanden haben, um dem Lösungsprozess folgen zu können. Andernfalls wäre es für die passive Gruppe nicht möglich, zu erkennen, wann die Aufgabe richtig gelöst ist.

Nonverbale Kommunikation

In dieser Übung zeigt sich eine neue Möglichkeit nonverbaler Kommunikation. Um Zustimmung zu einer Lösung zu bekunden, sind die Schüler aufgefordert zu klatschen. Das Klatschen begrenzt die Übung zeitlich, gleichzeitig ist Klatschen für Schüler positiv belegt und daher ein gute Möglichkeit der Bestätigung. Die Übung wird in Stille durchgeführt. Wenn geredet wird, wird die Übungsdurchführung der Gruppe direkt unterbrochen und die nächste Gruppe ist an der Reihe. So kann eine ruhige Lernumgebung geschaffen werden.

Gesetz der Gleichzeitigkeit

Dinge, die sich gemeinsam/gleichzeitig verändern, werden als zusammengehörig empfunden. Der Lehrer zeichnet als Unterstützung für die Schüler den Übungsaufbau an die Tafel. Stellt sich ein neuer Schüler in eines der Felder, überträgt der Lehrer gleichzeitig den neuen „Ergebnisstand“ auf den symbolischen Übungsaufbau an der Tafel. Auf diese Art und Weise können handelnde und symbolische Ebene verbunden werden und damit der Lernprozess der Schüler unterstützt werden.

Gesetz der Ähnlichkeit

Das Gesetz der Ähnlichkeit gehört zu den Gesetzen der Gestaltpsychologie. Es besagt, dass Dinge, die ähnlich sind, vom Menschen als zusammengehörig wahrgenommen werden. In dieser Übung spielt es vor allem beim Tafelbild des Lehrers eine große Rolle. Damit Tafelbild und Übungsaufbau als zusammengehörig wahrgenommen werden, muss das Tafelbild, in Ausrichtung, Abfolge und Benennung, mit dem tatsächlichen Übungsaufbau übereinstimmen. Ist das rechte Feld mit der Potenz 5^0 belegt, muss das ebenso für das rechte Feld des Tafelbildes gelten.

Die Rolle des Lehrers

Der Lehrer hält sich während des gesamten Lösungsprozesses zurück. Er fungiert in erster Linie als „Schiedsrichter" und legt nur die Struktur des gesamten Lernprozesses fest. Er ist dafür verantwortlich, eine bestmögliche Lernumgebung zu schaffen.

6.3 Addition und Übertrag im Fünfersystem

Miriam Laug

Die folgende Übung soll die Addition und den Übertrag im Fünfersystem einführen. Den Schülern wird eine offene Aufgabe gestellt, die es ihnen ermöglicht das Konzept der Addition enaktiv zu erfahren.

Konkrete Umsetzung

Zu Beginn der Übung schreibt der Lehrer eine Rechenaufgabe im Fünfersystem an die Tafel, die mindestens einen Übertrag beinhaltet. Er fordert die Schüler dazu auf, diese Aufgabe zu lösen.

Dafür stellen sich rechts neben die aufgeklebten Felder ausreichend Schüler, um die erste Zahl zu repräsentieren, links neben die Felder ausreichend Schüler für die zweite Zahl (die Wertebelegung der Felder aus Übung 3.2 bleibt bestehen). Eine der beiden zu addierenden Zahlen wird dabei durch Mädchen, die andere durch Jungen repräsentiert.

Hintergründe

Zurückhaltung des Lehrers

Bei dieser Aufgabe ist es wichtig, nicht in den Lösungsprozess der Gruppe einzugreifen. Die Schüler sollten selbst erkennen, dass es am sinnvollsten ist, die Rechnung von hinten, also von der letzten Ziffer aus, zu beginnen. Dabei sollte Hilfestellung nur bei größeren Schwierigkeiten der Klasse erfolgen. Da den meisten Lehrern diese Zurückhaltung sehr schwer fällt, sollte der Lehrer sich zuvor bewusst machen, dass es für den Lernprozess der Schüler wichtig ist, dass er die Fehler der Schüler auch aushalten kann ohne einzugreifen.

Die Addition als Transferaufgabe

Um eine Addition im Fünfersystem durchführen zu können, müssen sich die Schüler bewusst werden, dass bei einem Wert von fünf ein Übertrag stattfinden muss. Der fünfte Schüler der ein Feld betritt, muss ein Feld weiter springen, die anderen vier Schüler verlassen das Feld ganz. Dieser Sprung symbolisiert den Übertrag. Die Addition fordert daher ein umfangreiches Verständnis des Fünfersystems. Die Schüler lernen den systematischen Aufbau des Fünfer- und dadurch auch des Zehnersystems kennen.

6.4 Die Darstellung von Kommazahlen

Felicia Zeiser

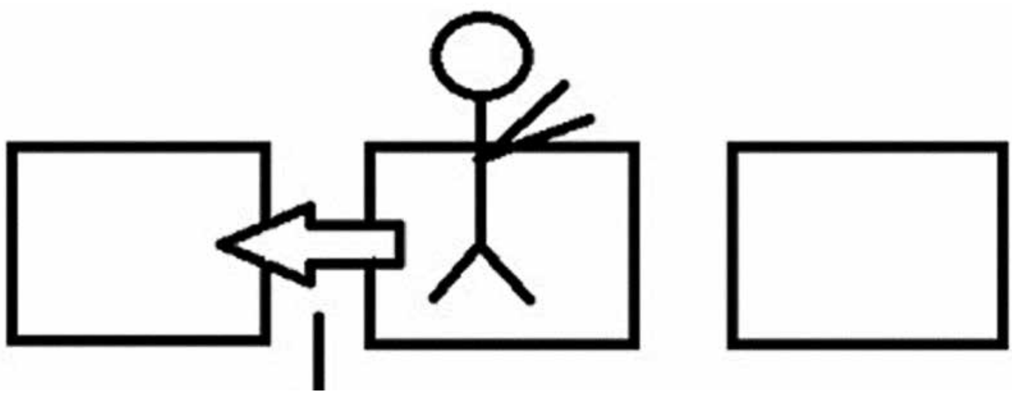
In der folgenden Übung wird der Zahlenbereich auf Nachkommastellen erweitert.

Konkrete Umsetzung Ein Schüler stellt sich in das rechte Feld. Simultan schreibt der Lehrer die Potenz 5^0 an die Tafel. Nun lässt er den Schüler rückwärts in das Feld links daneben springen. Beim Rückwärtsspringen erniedrigt der Lehrer den Exponenten der Potenz um eins, sodass die Hochzahl negativ wird: $5^0 \rightarrow 5^{-1}$. Das Komma zwischen beiden Feldern wird durch Kreppband markiert.

Hintergründe

Transferfähigkeit

Die Schüler sollten erkennen, dass aus dem Erhöhen des Exponenten um eins beim Vorwärtsspringen in ein Feld nach links, das Erniedrigen des Exponenten um eins



beim Rückwärtsspringen in das vorherige Feld folgt. Springt der Schüler nun vom Feld links neben dem Komma rückwärts in das Feld rechts neben dem Komma, sollte der Klasse klar werden, dass auch hier der Exponent um eins verringert wird: $5^0 \rightarrow 5^{-1}$.

6.5 Kommazahlen mit den Fingern darstellen

Felicia Zeiser

Konkrete Umsetzung

Die Schüler sollen die Zahl 1,4 im Fünfersystem angeben. Dabei sollen mit den Fingern der linken Hand die Zahl vor dem Komma dargestellt werden, mit den Fingern der rechten Hand die Nachkommastellen. Wer ein Ergebnis gefunden hat, soll seine Arme verschränken. Nach einer Bedenkzeit soll das Ergebnis mit den Fingern angezeigt werden.

Hintergründe

Nonverbale Kommunikation

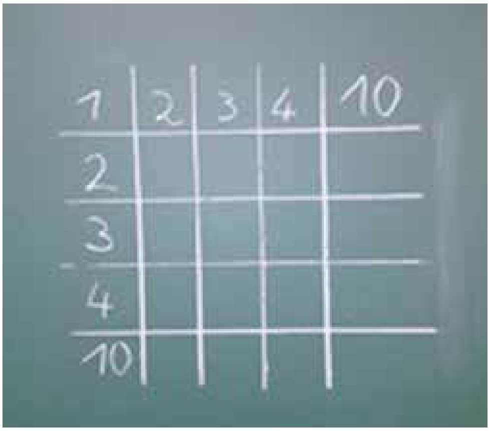
In dieser Übung zeigen sich zwei Möglichkeiten nonverbaler Kommunikation. Zum einen können durch das Anzeigen der Kommazahl mit den Fingern nonverbal Mengen kommuniziert werden, zum anderen kann über das Armeverschränken eine große Gruppe nonverbal abgefragt werden.

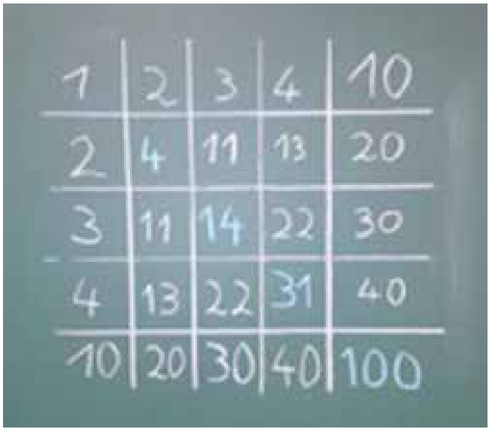
6.6 Das kleine Einmaleins im Fünfersystem

Miriam Laug, Felicia Zeiser und Kai Hoffmann

Konkrete Umsetzung

Den Schülern wird die Aufgabe gestellt, das kleine Einmaleins im Fünfersystem zu lösen. Zur Unterstützung und als Denkanstoß zeichnet der Lehrer eine Tabelle an die Tafel. Nun lässt der Lehrer den Schülern ca. fünf Minuten Zeit, sich mit der Aufgabe auseinanderzusetzen. Anschließend werden die Ergebnisse gemeinsam besprochen und in die Tabelle eingetragen.





Hintergründe

Das kleine Einmaleins kann nicht logisch erschlossen werden

Es ist nicht möglich sich $5 \cdot 7$ herzuleiten, außer über den umständlichen Weg der Addition. Daher muss das kleine Einmaleins auswendig gelernt werden. Das Auswendiglernen wird aber durch den symmetrischen Aufbau des 1×1 stark vereinfacht. Durch die Symmetrie fällt die Hälfte der zu lernenden Produkte weg.

Sich Problemen der Schüler bewusst werden

Es gibt keinen mathematischen Grund dafür, dass das Fünfersystem schwerer zu erlernen ist, als das Zehnersystem. Hat der Lehrer bei bestimmten Operationen im Fünfersystem Probleme, werden die Schüler vermutlich die gleichen Probleme im Zehnersystem haben. Dieser Probleme muss sich der Lehrer bewusst werden, um mit den Schwierigkeiten der Schüler umgehen zu können und diesen entgegen zu wirken.

7 Rechnen mit Größen

7.1 Wie viel ist eigentlich eine Million?

Patricia Epke, Julian Baier, Hannah Heinzelmannund Asya Yardimci

Konkrete Umsetzung

Die Schüler werden spielerisch an große Zahlen und Größenrelationen herangeführt.



Vorbereitung

Hausaufgabe ist es, ein Modell des eigenen (oder eines anderen) Zimmers im Maßstab 1:100 herzustellen. Dazu sollen die Schüler zunächst das Zimmer vermessen und dann aus Papier, Karton oder Holz ein entsprechendes Modell basteln und zur nächsten Unterrichtsstunde mitbringen.

Durchführung im Unterricht

Genau wie bei der vorherigen Übung werden zunächst alle Tische frei geräumt. Anschließend legen die Schüler die Modelle ihrer Zimmer auf den Tisch. Nun dürfen

sich die Schüler frei im Raum bewegen und haben so die Gelegenheit, die Modelle ihrer Mitschüler zu betrachten.

Nachbereitung

Im Anschluss an die Übung kann dann das Thema z. B. mit der Frage „Wie oft passt denn das Modell in euer Zimmer?“ vertieft werden.

Hintergründe

Umgang mit Maßen und Maßstäben

Die Kinder befinden sich in einer Lebensphase, in der sie versuchen, sich in die Welt einzuordnen und beginnen, sich für Maße und Größen zu interessieren. Die Aufgabe passt perfekt in die aktuelle Lebenswelt von Schülern der 5. und 6. Klasse, indem sie Größen greifbar macht.

Persönlicher Bezug

Durch den Bezug zum persönlichen Umfeld entwickeln die Schüler eine positive Einstellung zur Aufgabe, welche sie auf das Thema übertragen. Die Schüler erfahren zudem Wertschätzung durch ihre Klassenkameraden, die den Modellzimmern Aufmerksamkeit schenken. Dies kann zu einem besseren Miteinander in der Klasse führen.

Problemlösekompetenz

Das selbstständige Basteln des Modells erfordert Kreativität und Geschick im Umgang mit Materialen und Maßstäben. Darüber hinaus lernen die Schüler, mit freien Aufgabenstellungen umzugehen und diese eigenverantwortlich umzusetzen.

7.2 Erlebnisorientiertes Rechnen mit Größen

Christoph Klieber und Jesus Peinado Rubio

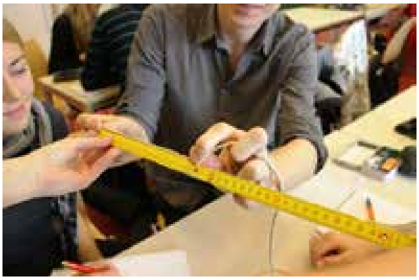
Konkrete Umsetzung

Die Schüler sollen, innerhalb einer Gruppe, die Hautoberfläche eines ihrer Gruppenmitglieder bestimmen.

Vermessung

Der Lehrer erteilt den Arbeitsauftrag zur Gruppenbildung. Anschließend bekommen die Klein-/Farbgruppen den Auftrag die Hautoberfläche eines ihrer Gruppenmitglieder zu vermessen. Dazu stellt der Lehrer geometrische Hilfsmittel, wie einen Zollstock und eine Schnur, zur Verfügung. Beim Besprechen des Arbeitsauftrages sollten der zeitliche Rahmen der Aufgabe, sowie die Aufgabenverteilung innerhalb der Gruppe festgelegt werden. Letzteres sollte von den Schülern selbst organisiert werden. Genaue Informationen zum Thema Aufgabenverteilung innerhalb einer Gruppe siehe Abschnitt „Gruppen“.[18]

Jede Gruppe bestimmt nun ein Gruppenmitglied und beginnt, mit den ihnen zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln, den Mitschüler zu vermessen.



Reflexion der Ergebnisse

Zum Ende des Zeitfensters sollten die einzelnen Gruppen ihre Ergebnisse an der Tafel zusammentragen. Dadurch präsentiert jede Gruppe individuell ihre Ausarbeitung. Bei der anschließenden gemeinsamen Betrachtung werden Gemeinsamkeiten und Unterschiede auffallen. Dabei sollten die vermessenen Probanden mit den Ergebnissen verglichen werden, um die Qualität der Daten bestimmen zu können. Die durchschnittlichen Ergebnisse hängen dabei stark vom Geschlecht und dem Alter der Schüler ab.

Hintergründe

Geometrie spielend lernen

Bei der selbständigen und aktiven Bearbeitung dieser Aufgabe werden sowohl geometrische Zusammenhänge spielend und anschaulich entdeckt, als auch mögliche Rechenwege für diverse Körperteile und geometrische Formen entwickelt. Dabei ist es hilfreich, einzelne Körperteile differenziert zu betrachten und am Ende aus der Summe der Einzelmessungen die Gesamtkörperoberfläche zu berechnen.

Individuelle Messgrößen

Am Ende der Aufgabe sollen die Schüler ihre Ergebnisse an der Tafel präsentieren.

18 Siehe: Claudia Roosen und Franziska Schuster: Kap.1.2 Innere Struktur von Farb- bzw. Langzeitgruppen, Abschnitt Rollenverteilung bei einer Gruppenarbeit

Dabei werden sie verschiedene Maßeinheiten benutzen und so werden Zusammenhänge zwischen verschiedenen geometrischen Größen erkennbar.

Beobachterfunktion des Lehrers

Durch die offene Aufgabenstellung kann der Lehrer die Rolle des Beobachters einnehmen. Er kann gezielt Schwächen und Stärken seiner Schüler bei der Durchführung beobachten und analysieren.

Der Lehrer sollte bei dieser Art von Aufgabe darauf achten, dass korpulente, eher schüchterne Schüler nicht bloßgestellt und gegen ihren Willen vermessen werden. Im Notfall ist hier ein aktives Eingreifen des Lehrers nötig.

7.3 Rechnen mit Größen

Esther Renz, Lara Rößler, Pascal Schade und Juliane Wilms

Bei dieser Aufgabe geht es um die Vorstellung von Größen und Einheiten.

Konkrete Umsetzung

Die Schüler schreiben eine möglichst alltägliche Geschichte, in der mindestens zwölf verschiedene Größen vorkommen. Diese sollen sie nicht durch umgängliche, sondern durch absurde Zahlen und Einheiten darstellen.

Beispieltext: Die kleine Made

Eine kleine Made saß in 3687 cm Höhe auf einem Ast und schaute gedankenverloren den sich mit $13{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ fortbewegenden Wolken hinterher. Der Anblick der 13.000 Meter entfernten Ungetüme am Himmel stimmte sie allerdings so traurig, dass sie bei ihren $3000 \cdot 10^{-3}$ Freunden, Marie, Hans und Edgar, Ablenkung suchte. Diese waren im Schnitt 33.120 Minuten älter als sie selbst, konnten dementsprechend $3{,}45 \cdot 10^{2}\,\%$ mehr Körpervolumen ihr Eigen nennen und gingen auch an diesem Tage, nämlich dem 42. nach der letzten Mondfinsternis im Frühling desselben Jahres, wieder einmal ihrer Lieblingsbeschäftigung, dem Schlemmen sämtlicher grüner Pflanzenteile, die sich im Umkreis von zweieinhalb Ellen befanden, mit genüsslicher Hingabe nach. Die kleine Made fragte: „He Edgar, hast du Lust mit mir zu spielen?“ Woraufhin die dicke Made Edgar nur gelangweilt antwortete: „Kleine Made, ich bin zu rund, als dass ich mich auch nur um 0,000.0089 Kilometer bewegen könnte!“ Enttäuscht kroch die kleine Made weiter und erkundigte sich bei Marie. Sie galt aufgrund ihres $\pi \cdot 1{,}1$ cm umfassenden Taillenumfangs als besonders schön, ob sie denn nicht mit ihr einen Ausflug zur „Braunen Oase“, einem morschen Baumstumpf, der seit über 3.628.800 Sekunden Erholung für Artgenossen der kleinen Made bot, unternehmen wolle. Doch Marie verneinte hastig und nuschelte während ihrer Essenspausen, sie müsse in den nächsten 0,000799087 Jahren noch $0{,}4 \cdot 10$ Kalorien zu sich nehmen, um ihren Taillenumfang von $\pi \cdot 1{,}1\,\text{cm}$ auf ganze, traumhafte $\pi \cdot 1{,}91\,\text{cm}$ zu erweitern, sodass sie behaupten könne, die perfekten Madenmaße von 60 − 90 − 60 zu besitzen. Ein einzelner Blick zu Hans verriet der kleinen Made, dass auch Hans zu nichts bereit wäre, da sich dieser mal wieder einem Mittagsschläfchen von ungefähr $8{,}3 \cdot 10^{-2}$ Tagen hingab. Die Traurigkeit wuchs und wuchs und führte dazu, dass sich die kleine Made an ihren ursprünglichen Platz begab, sich die 296,13 Kelvin warme Sonne auf den kleinen Madenbauch scheinen ließ und dabei den sich mit $13{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ bewegenden Wolken trübselig hinterher blickte.

Julia Weber, 15.11.12

Hintergründe

Gefühl für Größen und Einheiten

Die Schüler sollen sich vorstellen können, was eine Einheit bedeutet und für welche Darstellung von Größen sie sinnvoll ist. Sie sollen ein Gefühl für das Verhältnis der zu einer „Kategorie" gehörenden Einheiten bekommen, wie zum Beispiel Millimeter zu Meter zu Kilometer. Das entwickelte Gefühl soll ihnen bei der Abschätzung von Größen und der Kontrolle ermittelter Ergebnisse helfen.

Umrechnen der Einheiten

Das Umrechnen der Werte in absurde Zahlen und Einheiten ist nicht nur als bloße Rechenübung zu verstehen, denn die Schüler lernen dabei auch, in welchem Verhältnis die Zahlen und Einheiten zueinander stehen.

8 Bruchrechnen

8.1 Bruchrechnen – kritische Vorbemerkung

Rafael Prospero

„Der wahrscheinlich größte Fehler des traditionellen Mathematikunterrichts besteht darin, dass zu schnell auf eine formal-regelhafte Ebene aufgestiegen wird, bevor noch ausreichende intuitive und anschauliche Vorstellungen vom jeweiligen Stoff erworben wurden. Diesen Fehler kann man an fast allen Stoffgebieten der Schulmathematik beobachten. Die Bruchrechnung ist aber ein besonders geeignetes Studienobjekt.“[19]

Dieses Zitat von G. Malle bringt ein entscheidendes Problem des Mathematikunterrichts auf den Punkt. Den Schülern fehlt es oft an mathematischem Grundverständnis, weil sie zu schnell vom Lernstoff auf die symbolische Ebene hinübergeleitet werden. Dieser schnelle Übergang zu Rechenregeln und zu Formalem beeinträchtigt den elementaren Entwicklungsprozess der Veranschaulichung, Intuition und der mathematischen Motivation. Der Schüler muss sich auf Algorithmen und Schreibweisen konzentrieren und verliert so den wesentlichen Blick auf den praktischen Hintergrund, da dieser ungenügend eingehend geschult wurde. Dieses Manko wirkt sich folgenschwer auf das Verständnis und auf die mathematische Intuition der Schüler aus.

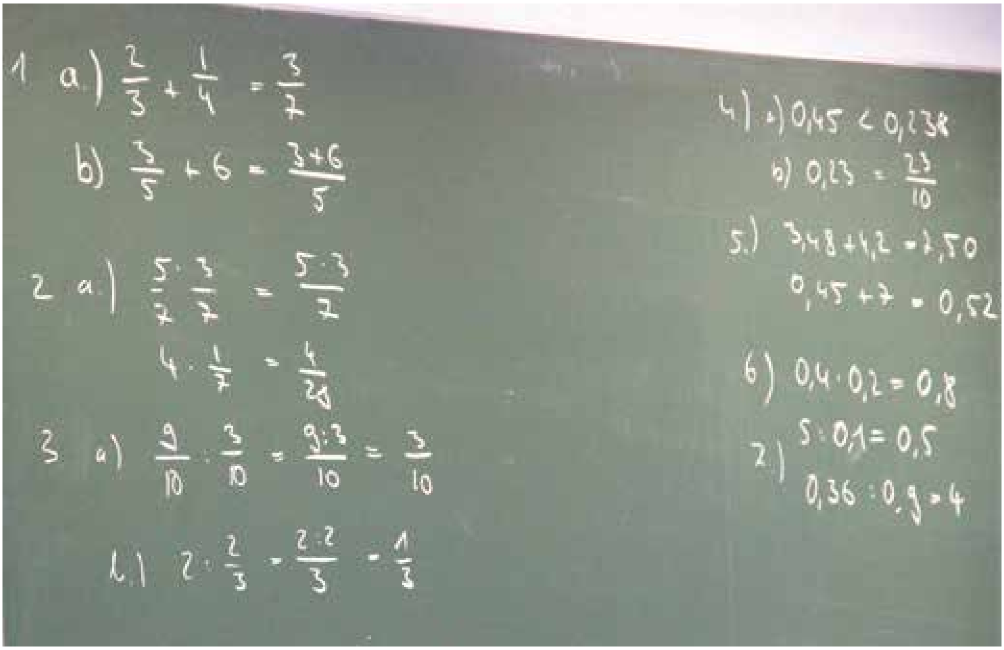
8.2 Typische Fehler beim Bruchrechnen

Rafael Prospero

Wie von G. Malle oben erwähnt, ist beim Thema „Bruchrechnung“ das angesprochene Problem sehr gut erkennbar. Einige Beispiele typischer Fehler beim Umgang mit

19 Malle, Günther (2004):“Grundvorstellung zu Bruchzahlen“ In: Mathematik lehren 123, S. 4

Brüchen und Zahlen mit Nachkommastellen zeigen das fehlende Grundverständnis der Schüler.



Um dieses Problem anzupacken, gilt es sowohl die Methoden zur Veranschaulichung als auch den notwendigen alltagstauglichen Bezug zur Praxis konsequent zu konstruieren. Diese Methoden sollen sich nicht nur für den Bruchbegriff selbst, sondern auch für den damit verbundenen Kalkül gedacht sein. Im Folgenden werden nützliche Methoden vorgestellt.

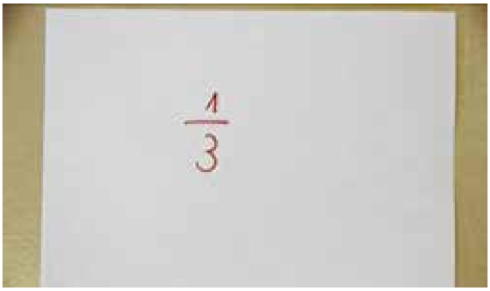
8.3 Bruch als Anteil

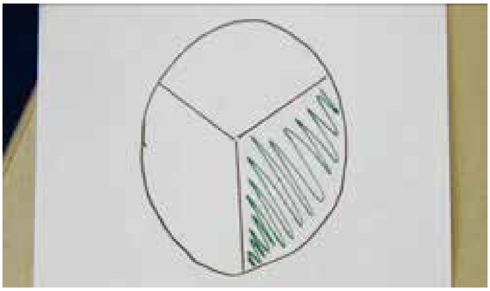
Christian Schweizer und Clarissa Sieber

Die folgende Abfragetechnik „Magnetpol“ soll das Verständnis und die Vorstellung von Brüchen fördern.

Konkrete Umsetzung

Jeder Schüler beschriftet zwei Zettel. Auf den einen schreibt er in rot die symbolische Darstellung eines Bruches seiner Wahl, auf den anderen in grün eine zugehörige bildliche Darstellung.



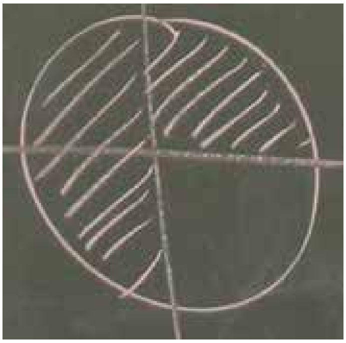


Die Zettel aller Schüler werden nun eingesammelt, gemischt und neu ausgeteilt, sodass jeder einen rot und einen grün beschrifteten Zettel erhält. Nun ist es die Aufgabe der Schüler, den jeweiligen Partner, d. h. die bildliche Darstellung zur symbolischen und umgekehrt zu finden. Wenn der Partner gefunden wurde, sollen sie sich nebeneinander aufstellen und an die Hand nehmen. So bilden sich Kreise aus Schülern. Das Ende des Spiels ist erreicht, wenn jeder einen zugehörigen Partner gefunden hat.

Hintergrund

Unterschiedliche Formen eines Anteils

Durch diese Übungsform entstehen unterschiedliche Darstellungsmöglichkeiten für Brüche. Hierbei spielt die mengenhafte Vorstellung des Einzelnen eine entscheidende Rolle. Aufgrund seiner Erfahrung stellt er den Bruch auf eine bestimmte Weise dar. Dabei lassen sich grob zwei Schemata unterscheiden:

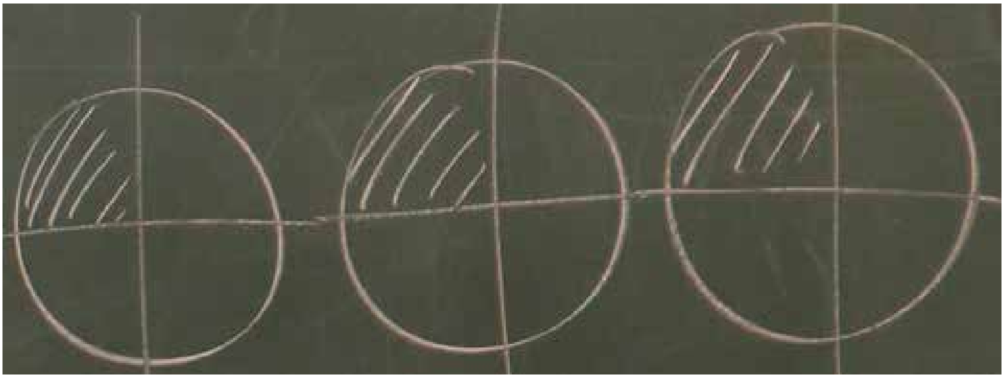


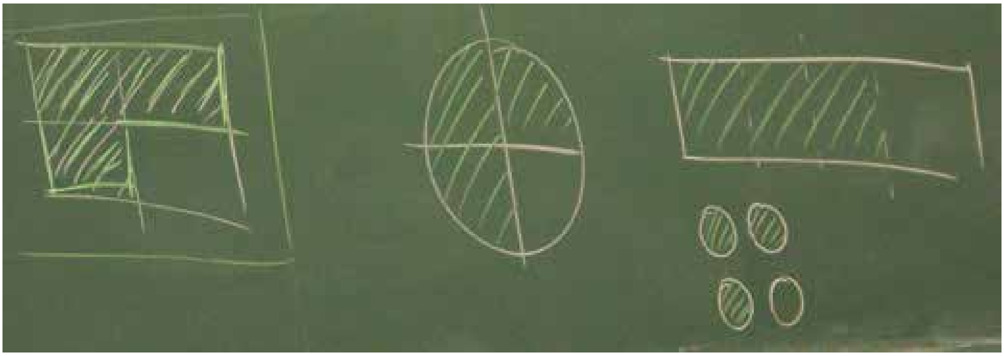
Bruch als Teil eines Ganzen

Zum einen kann man den Bruch als Aufteilung eines Ganzen verstehen. So gibt der Zähler die Anzahl der Anteile und der Nenner die Gesamtzahl der Teile an.

Bruch als Teil mehrerer Ganzer

Zum anderen kann man sich mehrere Ganze vorstellen von denen jeweils nur ein gleicher Teil markiert ist. Diese Teile werden nun im Bruch aufsummiert.





Der Zähler gibt hier die Anzahl der Ganzen an, der Nenner die Unterteilung. Besonders interessant wird es dann, wenn sich zwei Schüler den gleichen Bruch ausgesucht haben und unterschiedliche ikonische Darstellungen benutzen. Hier lernen die Schüler von Altersgenossen eine andere Vorstellungsweise kennen.

Fragestellung in beide Richtungen

Durch das Suchen eines Partners, sowohl für die ikonische als auch symbolische Darstellung, muss der Schüler seinen Bruch in die entsprechende andere Darstellungsform umformen. So wird in beide Richtung abgefragt.

8.4 Kürzen und Erweitern von Brüchen

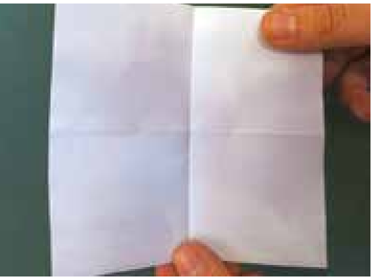
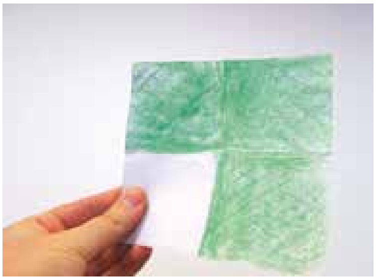
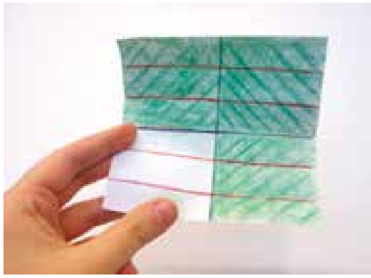
Melina Kreutz

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{6}$ und $\frac{3}{9}$ sehen völlig verschieden aus und bezeichnen dennoch dasselbe. Im Folgenden soll ein Weg beschrieben werden, der den Schülern einen anschaulichen Zugang zum Kürzen und Erweitern von Brüchen eröffnen soll.

Konkrete Umsetzung

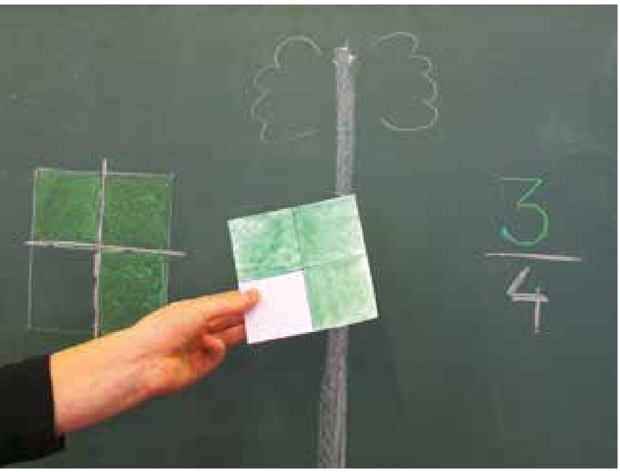
Blätter falten

Alle Schüler erhalten ein kleines weißes Blatt Papier. Soll beispielsweise der Bruch $\frac{3}{4}$ dargestellt werden, so muss das Blatt durch Falten in vier gleichgroße Rechtecke geteilt werden. Nun werden drei der erhaltenen Flächen in der Lieblingsfarbe des Schülers eingefärbt. Die Anzahl der eingefärbten Kästchen entspricht dem „Zähler", die Gesamtzahl an Kästchen dem „Nenner". Nun können die Schüler erleben, wie sich durch weiter falten, also schaffen kleinerer Flächen, sowohl der Nenner, als auch der Zähler erweitern. Natürlich ist hier als Beispiel nicht nur $\frac{3}{4}$ möglich. Den Kindern sind im Grunde keine Grenzen gesetzt.

Nachbereitung

Als langsame Übertragung sollte die Übung an der Tafel nachgearbeitet werden. Dazu wählt man ein Beispiel der Kinder und arbeitet auch mit deren Farben. Parallel zum Falten werden erst die Anfangsfalten an der Tafel skizziert und der zählende Bereich in der entsprechenden Farbe schraffiert. Gleichzeitig schreibt man in Form einer Gegenüberstellung den Anfangsbruch neben die Skizze.

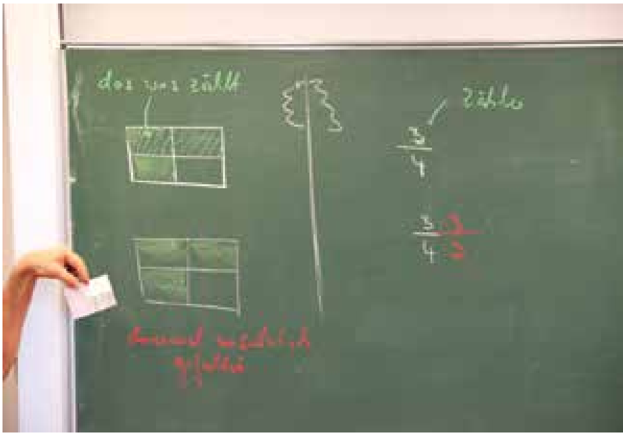


Der Zähler in der entsprechenden Farbe und der Nenner in weiß. Mit einer auffallenden Farbe können nun gestrichelt die zusätzlichen Falten in einer weiteren Skizze eingezeichnet werden. Die Farbe, die die zusätzlichen Falten in der Skizze darstellt, beschreibt die Erweiterung des Bruchs in der Gegenüberstellung.

Ein Bruch hat unendlich viel Repräsentanten

Um zu erfahren, dass ein Bruch unendlich viele Repräsentanten hat, darf jeder

Schüler einen Bruch, den der Lehrer an die Tafel schreibt (z. B. $\frac{3}{4}$), beliebig erweitern oder kürzen. Die Kreide wird zum Redestab, indem sie weitergegeben wird. Diese Übung kann man einige Minuten so fortführen, so dass sich möglichst viele Schüler trauen.



Hausaufgabe

Jeder Schüler soll über circa eine halbe Seite eine beliebige Bruchzahl unterschiedlich darstellen.

Hintergründe

Emotionales Lernen

Weil alle Schüler ein eigenes Blatt erhalten, können sie selbst erleben, wie sich das Falten auf Zähler und Nenner auswirkt. Indem man den Kindern möglichst viel Freiheit lässt bezüglich der Größe von Zähler und Nenner, wird zusätzlich die allgemeine Gültigkeit deutlich. Die Wahl der Lieblingsfarbe ist wichtig, denn so baut sich für die Schüler eine emotionale Ebene auf. Sie können besser den Zusammenhang zwischen „Zähler" und der Lieblingsfarbe, die „zählt", begreifen.

Farbkodierung

Dies ist auch eine Form von Farbkodierung, die man in die ikonische und die symbolische Darstellung an der Tafel einfließen lassen kann. Nach dem Gesetz der Ähnlichkeit erleichtert man den Schülern die Verknüpfung von symbolischer, ikonischer und enaktiver Ebene. Dieser Prozess wird durch die Gleichzeitigkeit in der Nachbereitung noch bestärkt.

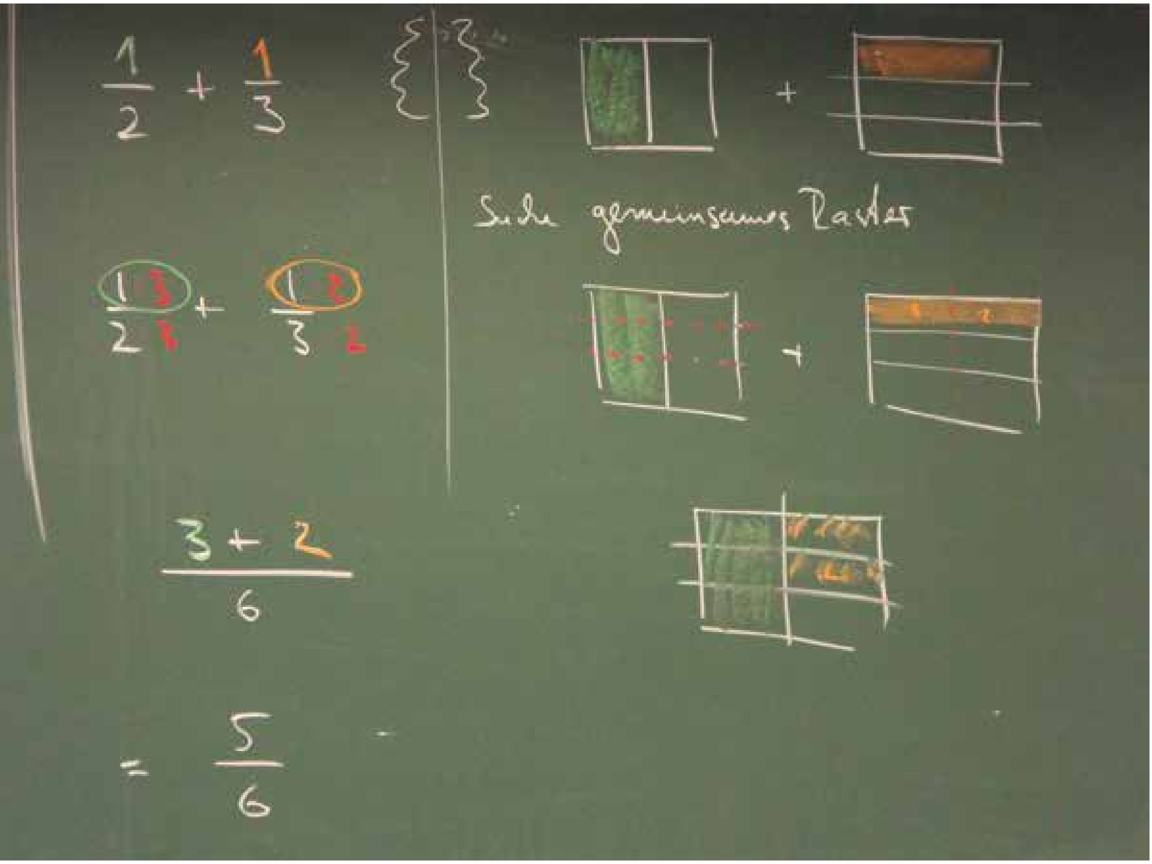
8.5 Addition von Brüchen

Pascal Schade, Juliane Wilms, Esther Renz und Lara Rößler

Bruchrechnen wird enaktiv eingeführt. Dazu werden $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ addiert.

Konkrete Umsetzung

Jeder Schüler erhält zwei rechteckige Papierzettel. Diese sollen sie gemäß der zwei zu addierenden Brüche falten. Die jeweiligen Anteile werden mit unterschiedlichen Farben ausgemalt. Der Lehrer übernimmt dabei die Schritte, welche die Schüler mit den Zetteln machen, bildlich und mathematisch formal an die Tafel.



Im nächsten Schritt wird der eine Zettel mit der gleichen Faltung wie der jeweils andere versehen, sodass nun beide die gleiche Einteilung haben, jedoch mit den unterschiedlich eingefärbten Anteilen. Jetzt werden auf einem der beiden Zettel, zusätzlich zu den bereits ausgemalten Kästchen, die Anzahl der Kästchen des anderen

Zettels ausgemalt wobei die Farbkodierung beibehalten werden soll. So erhalten wir das Ergebnis der Addition der beiden Bruchzahlen in Form eines neuen Anteils (ausgemalte Kästchen / Gesamtzahl der Kästchen), indem wir als erstes die Brüche gleichnamig gemacht und anschließend addiert haben.

Hintergründe

Wechselspiel zwischen den Ebenen

So selbstverständlich diese Aufgabe für einen erwachsenen Menschen erscheinen mag, ist sie in Wirklichkeit nicht. Für Kinder ist es schwer zu verstehen, warum wir den „Umweg“ über die Brucherweiterung gehen müssen. Daher ist es nötig, die Aufgabe Schritt für Schritt abzuarbeiten, damit die Schüler verstehen, was bei jedem einzelnen passiert. Wichtig hierfür ist das Wechselspiel zwischen der enaktiven, ikonischen und symbolischen Ebene. Dies ermöglicht dem Schüler, das Prinzip zu verstehen und nicht nur ein “Kochrezept” auswendig zu lernen. Für diese Prozedur sollte genug Zeit zum Üben und Verstehen eingeplant werden.

8.6 Anteile von Anteilen – Auf dem Weg zur Multiplikation

Moana Klein und Sarah Englmeier

Bruchrechnen bereitet vielen Schülern Probleme. Im Folgenden sollen zwei Möglichkeiten aufgezeigt werden, um Schülern das Multiplizieren von Brüchen verständlicher zu machen und ihnen einen haptischen Zugang zu diesem Thema zu verschaffen.

Konkrete Umsetzung

1. Möglichkeit: Säfte

Was ist mehr: „$\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{7}$“ oder „$\frac{2}{7}$ von $\frac{3}{4}$“ ? Ein Schüler kommt nach vorne an das Pult, um $\frac{2}{7}$ Orangensaft herzustellen. Für die Übung werden Plastikbecher 0,3l und 0,5l; 1l Orangensaft und 1l Traubensaft benötigt. Der Freiwillige verteilt einen Liter Orangensaft gleichmäßig auf sieben Becher. Fünf von diesen Bechern werden auf die Seite gestellt und mit zwei Bechern wird weitergearbeitet. Ein anderer Schüler macht nun weiter, um $\frac{3}{4}$ von diesen $\frac{2}{7}$ Saft zu erzeugen. Dazu wird der Inhalt der zwei Becher gleichmäßig auf vier Becher verteilt. Nimmt man nun drei dieser Becher, erhält man die gewünschten „$\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{7}$“ Orangensaft.




Nun wird die Frage gestellt, ob man am Ende mehr Saft erhält, wenn man „$\frac{2}{7}$ von $\frac{3}{4}$“ oder „$\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{7}$“ Saft nimmt. Sind die Schüler für die erste Antwort, sollen sie es mit nach oben gerichtetem Daumen anzeigen; bei der zweiten Antwort mit nach unten gerichtetem Daumen. Eine andere Möglichkeit wären verschränkte Arme bei der ersten Antwort und hängende Arme bei der zweiten.

Jetzt wird der andere Fall analog zum ersten Fall durchgespielt, nur nimmt man anstatt des Orangensafts Traubensaft zur besseren Unterscheidung (Vorsicht: Hier größere Becher benutzen, als beim ersten Durchlauf!). Die vom Lehrer gestellte Frage kann nun beantwortet werden, indem ein Schüler die Inhalte, der am Ende übrig gebliebenen Becher bei beiden Durchläufen, in zwei neue Becher eingießt. Der Vergleich zeigt, dass zum Schluss gleich viel Traubensaft und Orangensaft vorhanden ist.

Didaktische Bemerkungen

Steuerung des Schwierigkeitsgrades über das Material

Um Schülern den Versuch zu „erschweren“, gibt es verschiedene Schwierigkeitsgrade bezüglich der Größe und der Menge der Becher.

1. Passende Anzahl und Größe der Becher bereitstellen
   → erleichtert Schülern den Versuch
2. Passende Anzahl, aber unterschiedliche Größen
   → Schüler denkt selbst darüber nach, ob die abzufüllende Menge in den Becher passt
3. Zu viele Becher bereitstellen
   → Schüler erkennt selbst, wie viele Becher er benötigt
4. Zu wenig Becher bereitstellen
   → Schüler spricht Lehrer selbst darauf an, dass mehr Becher benötigt werden

Als Lehrperson kann man selbst entscheiden, welchen Schwierigkeitsgrad man wählt, abhängig von dem Leistungsniveau der Klasse.

„Zug-um-Zug-Prinzip“

Um die Klasse während des Experiments ruhig zu halten, gibt es die Möglichkeiten, die Saftflasche als „Redestab“ fungieren zu lassen. Wenn nur ein Schüler aktiv am Pult agiert, ist er derjenige, der Anmerkungen machen darf. Der Rest der Klasse schenkt dem im Fokus stehenden die Aufmerksamkeit und wenn es Einwände gibt, wird die Flasche weitergereicht und derjenige darf seine Ideen zeigen.

Nonverbale Kommunikation mit Einbeziehung der Schüler

Die Schwierigkeit bei einem Experiment an der Tafel ist, alle Schüler mit einzubeziehen und die Aufmerksamkeit aller Schüler zu bekommen. Durch die Frage, ob „$\frac{2}{7}$ von $\frac{3}{4}$“ oder $\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{7}$“ mehr sind, und durch die Abfrage über nonverbale Kommunikation (Daumen hoch, Daumen runter) werden alle mit einbezogen.

Konkrete Umsetzung

2. Möglichkeit: Stifte

Statt Säfte können Stifte verwendet werden. Die Technik wird am Beispiel „$\frac{2}{5}$ von $\frac{2}{3}$“ illustriert.

Zwei Schüler werden nach vorne gebeten und es wird ein Operator $\frac{2}{3}$ und $\frac{2}{5}$ festgelegt. An den linken Rand des Tisches werden 15 Stifte gelegt. Operator $\frac{2}{3}$ nimmt nun $\frac{2}{3}$ der 15 Stifte weg, also zehn Stifte, und reicht sie an Operator $\frac{2}{5}$ weiter. Dieser nimmt dann $\frac{2}{5}$ von diesen zehn Stiften und legt das Ergebnis, also vier Stifte, an den rechten Rand des Tisches.

Gleichzeitig kann jeder Tisch mit zwei Schülern den Versuch parallel durchführen. Dazu wird auch an jedem Tisch Operator $\frac{2}{3}$ und Operator $\frac{2}{5}$ festgelegt.

Nun soll „$\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{5}$“ genommen werden.

Dazu tauschen die Operatoren die Plätze. Operator $\frac{2}{5}$ nimmt dann zuerst $\frac{2}{5}$ von den 15 Stiften, also sechs Stifte, und gibt sie weiter an Operator $\frac{2}{3}$, welcher dann $\frac{2}{3}$ davon nimmt, also vier Stifte und sie wieder an den rechten Rand legt.

Didaktische Bemerkungen

Durch die Partnerarbeit wird die individuelle Auseinandersetzung mit dem Problem gewährleistet. Das enaktive Arbeiten ermöglicht dem Schüler, zu erleben, dass das Ergebnis nicht von der Reihenfolge des Operators abhängt (Platzwechsel), das heißt, dass „$\frac{2}{5}$ von $\frac{2}{3}$“ das Gleiche ist wie „$\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{5}$“.

Nun kann vom Lehrer gefragt werden, ob es noch weitere Brüche gibt, bei denen das genau so funktioniert. Dazu werden weitere „Stiftbeispiele“ von Schülern selbst erfunden.

Didaktische Schwierigkeiten

Für Schüler kann es befremdlich wirken, dass bei der Multiplikation von Brüchen, welche kleiner als eins sind, das Ergebnis jeweils kleiner ist, als beide Faktoren.

Beispiel $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, aber $\frac{1}{2} > \frac{1}{6}$ und $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$

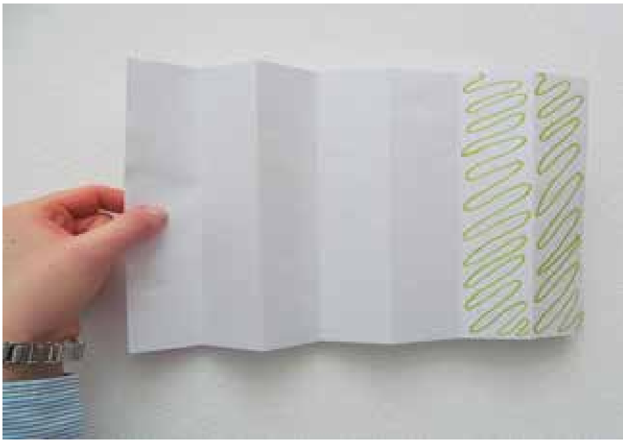
Zur Veranschaulichung dieses Problems dienen die zwei oben aufgeführten Beispiele, denn aus der ganzen Saftflasche bleibt nur ein Rest im Becher übrig und von den Stiften bleibt auch lediglich ein Bruchteil übrig.

8.7 Problembehandlung: Von „von“ zu „mal“

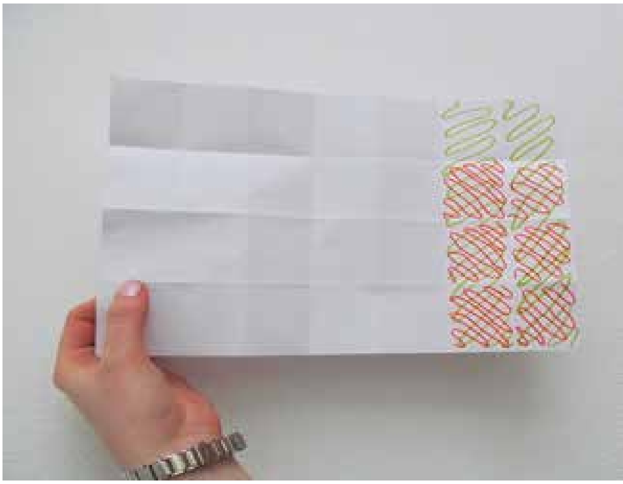
Monja Beirer und Julia Weber

Die bisherige Rolle des Bruches als Anteil wird nun auf die des Operators übertragen. Dazu betrachtet man den Übergang von „$\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{7}$“ zu der Multiplikation „$\frac{3}{4}$ mal $\frac{2}{7}$“.

Konkrete Umsetzung



Jeder in der Klasse benötigt ein DIN A4 Blatt, mit welchem der haptische Vorgang repräsentiert werden soll. Es werden zwei leichte Brüche ausgewählt. Diese seien beispielsweise $\frac{2}{7}$ und $\frac{3}{4}$ und die Aufgabe lautet, $\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{7}$ zu nehmen. Der Schüler soll zunächst $\frac{2}{7}$ mit dem Blatt darstellen, indem er es in sieben gleich große Teile faltet und zwei dieser Teile farblich markiert, beispielsweise in grün. Die restlichen Teile werden umgefaltet, sodass sie nicht mehr sichtbar sind.



Als nächstes sollen $\frac{3}{4}$ von der grün eingefärbten Fläche, die nun als neues Ganzes gilt, genommen werden. Dies bedeutet, dass die grüne Fläche in vier gleich große Teile geteilt wird und drei davon farblich anders markiert werden, z. B. in rot.

Insgesamt haben die Schüler den Anteil $\frac{3}{4}$ vom Anteil $\frac{2}{7}$ dargestellt, denn das vollständig aufgefaltete DIN A4 Blatt besteht nun aus 28 gleich großen Teilen, von denen 6 zweifarbig unterlegt sind.

Die rot-grün gefärbte Fläche wird nun als Rechteck aufgefasst, dessen Inhalt berechnet werden soll, d. h. man berechnet $\frac{3}{4}$ „mal“ $\frac{2}{7}$ und erhält $\frac{6}{28}$, was genau der Größe der zweifarbig markierten Fläche entspricht.

Hintergrund

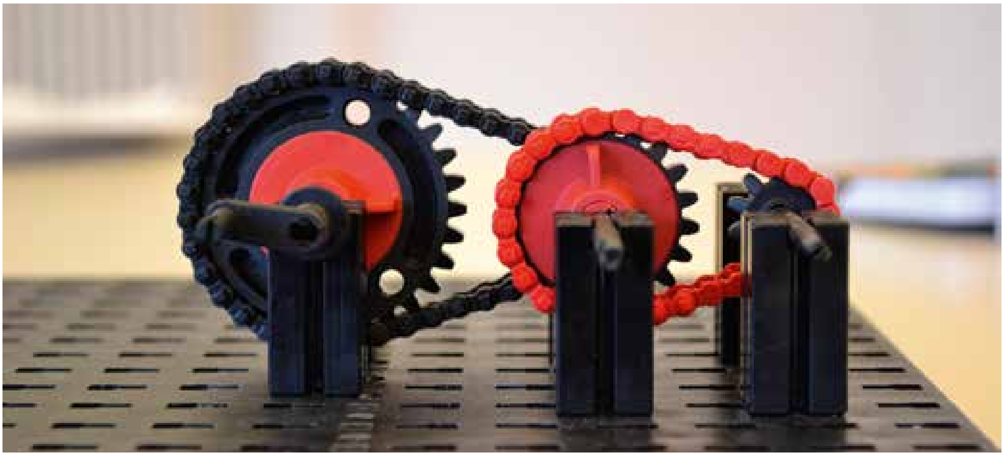
Das Ziel dieser Übung ist, dass die Schüler ihre bisherige Vorstellung der Multiplikation zweier Zahlen 7 und 4 als Berechnung der Fläche eines Rechtecks mit den Seitenlängen 7 und 4 auf das Multiplizieren eines Anteils dieser Zahlen, also $\frac{2}{7}$ und $\frac{3}{4}$

projizieren. Dabei werden die Anteile der Seitenlängen miteinander multipliziert, was im obigen Beispiel bedeutet, dass ein kleineres Rechteck berechnet wird. Somit dient die grafische Darstellung als Schlüssel von „von“ zu „mal“.

8.8 Der Bruch als Verhältnis

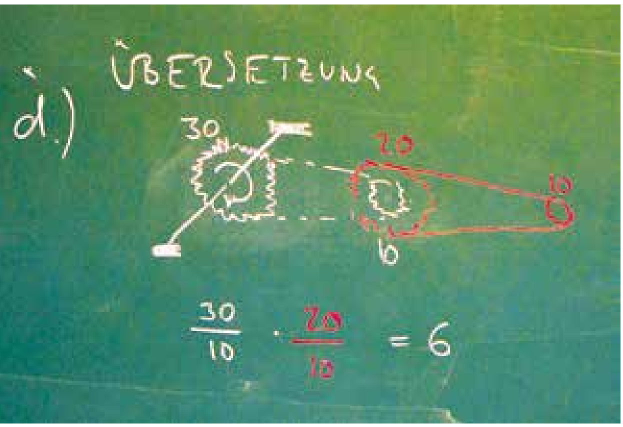
Leopold Fischer und Michael Esser

Die Schüler entdecken Brüche am Fahrrad.



Konkrete Umsetzung

Der Lehrer bringt ein Modell zweier Zahnräder, die durch eine Kette verbunden sind, mit in die Klasse. Es soll festgestellt werden, wie viele Umdrehungen die Zahnräder bei einer vollen Drehung des ersten vollführen. Gleichzeitig wird das Modell an der Tafel skizziert und die Anzahl der Zähne des ersten Rads vorgegeben. Herauszufinden ist, wie viele Zähne die restlichen Räder haben müssen.



Das Fahrrad wird auf das Pult gestellt und der Zusammenhang zwischen dem Modell und der Kettenschaltung aufgezeigt. Die Farbgruppen zählen im Anschluss die Zähne der einzelnen Ritzel an ihren eigenen Fahrrädern. Ihre Ergebnisse halten sie in einer Tabelle bzw. auf der Tafel fest.



Erweiterung

Als Hausaufgabe können alle Übersetzungsmöglichkeiten des Fahrrads auf einem Zahlenstrahl dargestellt werden.

Hintergründe

Bruch als Verhältnis

Der Bruch kann verschiedene Rollen einnehmen. Während seine Aufgabe als Teil eines Ganzen relativ offensichtlich ist, ist er als Verhältnis zweier Größen eher schwer zu erfassen. Durch dieses anschauliche Beispiel lernen die Schüler mit dem abstrakten Begriff „Verhältnis“ umzugehen.

Mathematik im Alltag

Die Schüler fahren regelmäßig mit dem Fahrrad und benutzen hierbei ständig die Gangschaltung. Hier wird nun Verständnis für einen komplexen Vorgang im Alltag geschaffen, es wird ein mathematischer Begriff in den Alltag transportiert.

8.9 Neidfreies Teilen

Pascal Schade, Juliane Wilms, Esther Renz und Lara Rößler

Bei dieser Übung geht es darum, eine Menge so aufzuteilen, dass es hinterher keinen Streit gibt.

Konkrete Umsetzung

Vorübung

Alle Schüler versammeln sich um einen Tisch. Zwei Freiwillige dürfen am Tisch Platz nehmen. Die beiden Schüler sind nun zwei Räuber, die ihre Beute – verschiedene Süßigkeiten oder Ähnliches – gerecht aufteilen wollen. Die Beute sollte extra so gewählt sein, dass sie nicht einfach zu halbieren ist. Die Räuber sind jedoch mittlerweile verfeindet und keiner gönnt dem anderen mehr als sich selbst. Diese Hintergrundinformation sollte den Schülern klar gemacht werden. Jetzt stellen sie die Frage: Wie kann neidfrei aufgeteilt werden?

Auflösung

Eine Möglichkeit neidfrei zu halbieren ist die folgende.

Eine Person darf teilen, so wie es ihr als fair erscheint. Der Andere darf sich eines der beiden Teile aussuchen. So sind beide zufrieden, da sie gleichermaßen an der Entscheidung beteiligt waren.

Aufgabenstellung

Bei drei Personen bietet sich das Selfridge-Conway-Prinzip an.

A macht drei seiner Meinung nach gleich große Haufen. B kann nun, wenn er einen Haufen für zu groß hält, diesen entsprechend kürzen und die Reste beiseitelegen, oder passen. Danach darf zuerst C, dann B und zuletzt A sich einen Haufen nehmen, wobei B den beschnittenen Haufen nehmen muss, sofern ihn C nicht bereits genommen hat.

Bis auf mögliche Reste ist die Beute jetzt gleichmäßig verteilt. Derjenige von B und C, der das nicht-beschnittene Stück genommen hat, muss nun den Rest erneut in drei Haufen aufteilen. Anschließend nimmt sich zuerst derjenige von B und C, der den Rest nicht aufteilen musste, dann A und der verbleibende bekommt das Reststück was noch übrig blieb.

So erhält nach dem jeweiligen subjektiven Empfinden der drei Probanden jeder seinen gerechten Anteil der Beute.

Hintergründe

Verschiedene Wirklichkeitsauffassungen – Pädagogische Dimension der Mathematik

Klar sollte den Schülern bei dieser Übung werden, dass jeder Mensch eine andere Wirklichkeitsauffassung hat. Was dem Schüler A möglicherweise als fair erscheint, kann für den Schüler B total unfair sein.

Ziel ist es also, den Schülern Möglichkeiten für neidfreies Teilen aufzuzeigen, denn damit kann man im alltäglichen Leben vielleicht so manchen Streit vermeiden. Ein typisches Beispiel hierfür ist eine Erbschaft. Keiner der Erben möchte weniger als der andere haben. Daraus kann sich schnell ein großer Familienstreit entwickeln. Mit der Möglichkeit des neidfreien Teilens könnte man dies verhindern. Deshalb kann diese Übung auch als eine Form der Gewaltprävention angesehen werden, da sie zeigt, wie Unstimmigkeiten friedlich gelöst werden können.

8.10 Ein haptischer Beweis für die Teilbarkeit durch 3

Jens Franken und Jonathan Müller

Konkrete Umsetzung

Vorbereitung

Zur Vorbereitung werden ein paar 10 €-Scheine, mehrere 1 €-Stücke benötigt.

10-Cent- und 1-Cent-Stücke leiht sich der Lehrer von seinen Schülern.

Durchführung

Das Geld wird nun auf dem Tisch ausgebreitet und sortiert. Die Anzahl der 10 Euro-Scheine (1000 Cent) entspricht der Tausender-Stelle unserer Zahl, die Anzahl der 1 Euro-Stücke (100 Cent) entspricht der Hunderter-Stelle usw.

Wir sortieren nach unserem Stellenwertsystem.

Beispiel

	4 · 10 Euro-Schein	7 · 1 Euro-Stück	5 · 10-Cent-Münze	7 · 1-Cent-Münze
Cent	4	7	5	7 = 4757
	T(ausender)	H(underter)	Z(ehner)	E(iner)

Das Geld wird wie in der Abbildung gelegt. Der Lehrer fragt die Schüler welche Zahl das vor ihnen liegende Geld symbolisieren soll und erkundigt sich nach einer ersten Einschätzung, ob die Zahl wohl durch drei teilbar sei oder nicht.

Die Zahl wird schnell herausgefunden und an der Tafel festgehalten, nur die Lösung für die Teilbarkeit ist noch offen. Es ist sehr wichtig den Schülern bewusst zu machen, dass nicht nach einem Drittel der Zahl gefragt ist, sondern nur, ob die Verteilung aufgeht oder nicht.

Beweis

Um dies zu lösen lässt sich der Lehrer drei persönliche Gegenstände von drei Schülern geben und legt diese vor dem Geld auf den Tisch.

Nun soll zunächst ein 10 Euro-Schein aufgeteilt werden. Schnell ist klar, dass bei der Aufteilung ein Cent übrig bleibt, da 1000 Cent = 3 · 333 Cent + 1 Cent gilt. Da es ja nur um die Teilbarkeit geht, kann der Lehrer vortretende Schüler also jeden einzelnen 10 Euro-Schein durch eine 1 Cent-Münze ersetzen lassen.

Danach wird das selbe Verfahren zunächst auf die 1 Euro-Stücke und zuletzt auf die 10 Cent-Stücke angewandt.

$$\begin{aligned}100\text{ Cent} &= 3\cdot 33\text{ Cent} + 1\text{ Cent}\\ 10\text{ Cent} &= 3\cdot 3\text{ Cent} + 1\text{ Cent}\end{aligned}$$

Beispiel Zahl 4757
das restliche Geld:

	4 Cent	7 Cent	5 Cent	7 Cent = 23 Cent
urspr.	10 Euro-Scheine	1 Euro-Stücke	10-Cent-Münzen	1-Cent-Münzen

Auf dem Tisch liegen nun noch (in unserem Beispiel) 4 + 7 + 5 + 7 Cent = 23 Cent, also genau die Quersumme unser ursprünglichen Zahl.

Es dauert nicht lange bis die Schüler erkennen, dass 23 nicht durch 3 teilbar ist und somit auch 4757 nicht durch 3 teilbar sein kann.

Hintergründe

Gruppendynamik

Es entsteht eine Gruppendynamik, indem sich die Schüler in dem Kreis integrieren. Dadurch beteiligt sich jeder Schüler an der bevorstehenden Aufgabe und ist gleich nahe am Geschehen.

Personalisieren durch Gegenstände

Die drei persönlichen Gegenstände der Schüler (z. B. Uhr, Handy, Schlüsselbund) bilden eine Personalisierung und lassen den Schüler näher am Geschehen teilnehmen. Die Geldmünzen werden benutzt, um den Schülern einen besseren, haptischen Bezug durch Gegenstände des Alltags zu ermöglichen.

9 Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme

9.1 Haptisches Lösen von (linearen) Gleichungen

Martin Kramer

Ein Vorwurf an die Didaktik der Schulmathematik besteht darin, dass viel zu schnell zu einer abstrakten Darstellung übergegangen wird. Kinder sollen von Anfang an erleben, dass Mathematik in den Quantitäten steckt und nicht in symbolischen, algorithmischen Manipulationen auf einem Stück Papier. Dieser Abschnitt darf als exemplarisches Beispiel eines behutsamen Übergangs vom Konkreten zur Formalisierung verstanden werden.

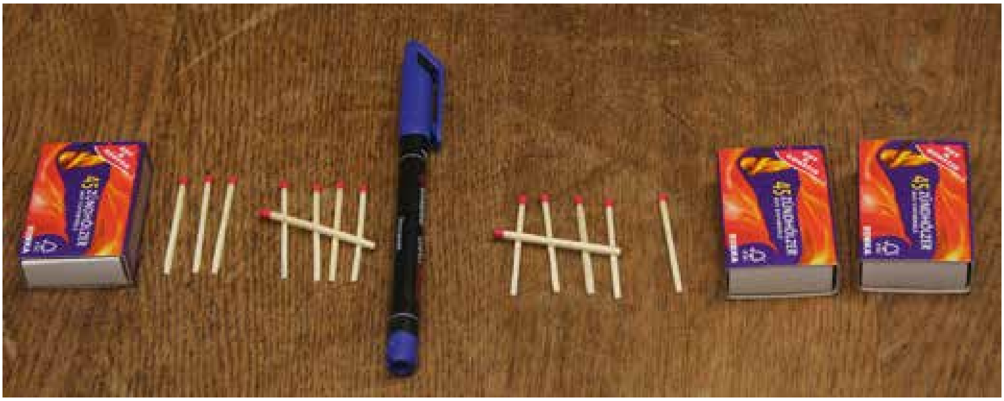
Konkrete Umsetzung

Ein Freiwilliger stellt eine Balkenwaage dar. Wird ein Streichholz auf eine Seite gelegt, neigt sich die Waage auf dieser Seite. Ein zweites Hölzchen auf der anderen Seite stellt das Gleichgewicht wieder her.

Es handelt sich um eine besondere Waage, welche nur Streichhölzer und keine Schachteln misst. Leere Schachteln werden nicht gewogen, auch wenn sie auf der Hand liegen.

Ist die Funktionsweise der Waage klar, wird der Freiwillige durch einen Stift ersetzt. In unserem Beispiel ist der Stift blau, weil der Pullover der „Waage“ blau ist. Ein Schüler legt auf eine Seite des Stiftes beliebig viele Hölzer, ein anderer ergänzt auf der anderen Seite, so dass die Waage wieder im Gleichgewicht ist.

Ein dritter Schüler versteckt anschließend auf einer Seite ein paar der gelegten Hölzer in einer leeren Schachtel. Weitere Hölzer dürfen anschließend in weiteren Schachteln versteckt werden, allerdings müssen in allen Schachteln dieselbe Anzahl sein. Die Frage ist nun: Wie viele Hölzer sind in einer Schachtel? Da die Aufgabe gerade vor allen Augen konstruiert wurde, ergibt die Frage keinen Sinn. Deswegen schließen alle die Augen und der Lehrer konstruiert eine Aufgabe. Das Beispiel aus der Vorlesung ist hier nachgebaut.



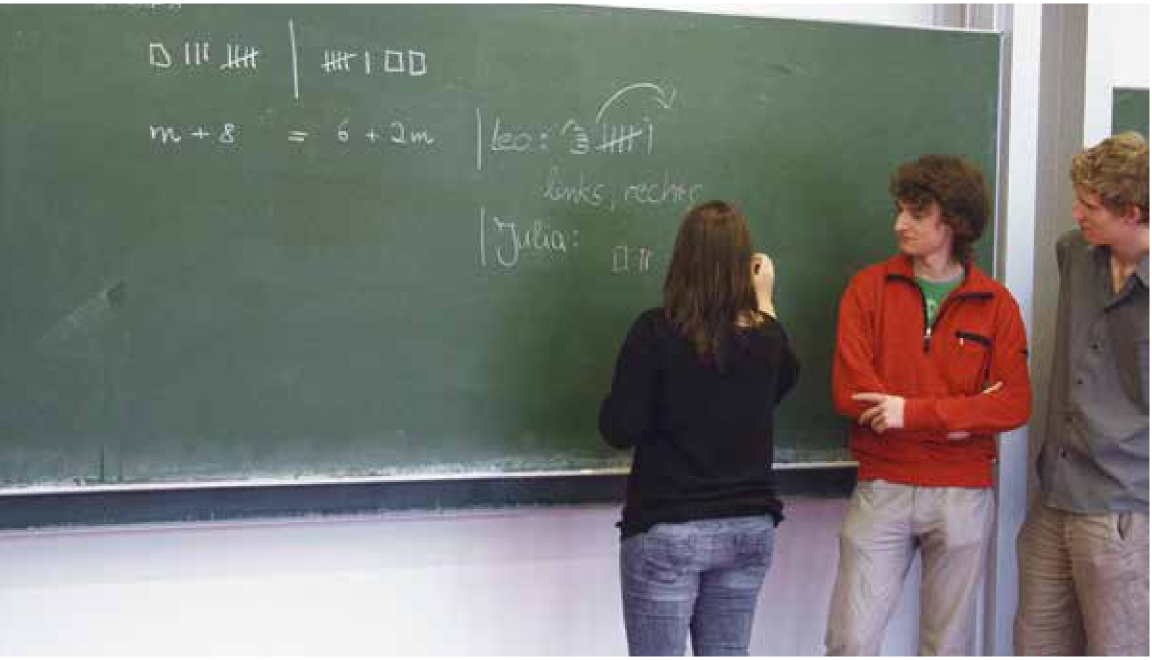
Wer eine Lösung gefunden hat, verschränkt die Arme. Wieder können auf nonverbale Weise alle Schüler gleichzeitig abgefragt werden. Im Beispiel müssten zwei Finger angezeigt werden.

Gelöst wird Schritt für Schritt. Die folgenden Klammerbemerkungen beziehen sich auf das E-I-S-Prinzip (J.S. Bruner[20]). Die konkrete Aufgabe wird mit Hölzern gelegt und gelöst (enaktive = handelnde Präsentationsebene), an die Tafel gezeichnet (ikonische = bildhafte Ebene) und übersetzt (symbolische = formale Ebene). Mit der Übersetzung in die Formelsprache kann man sich gerne Zeit lassen und stattdessen einige Zeit in der bildhaften Ebene „rechnen“.

20 Jérôme Seymour Bruner (*1. Oktober 1915) leistete wichtige Beiträge zur kognitiven Lerntheorie und war ein Initiator der sogenannten kognitiven Wende der Psychologie.

Jeder Lösungsschritt wird durch einen anderen Schüler vollzogen. Im Beispiel der Vorlesung wurden auf beiden Seiten (von Leo) sechs Hölzchen entfernt.

In einem zweiten Schritt wurde eine Schachtel entfernt. Nach jeder Rechenoperation geht der „Operator“ an die Tafel und schreibt auf, was er getan hat. Auf diese Weise werden die einzelnen Rechenschritte personalisiert.



In der symbolischen Darstellung wurde für die Variable ein „m“ verwendet, weil ich (Martin) die Hölzer versteckt habe.

Schließlich wurde die Gleichung zu $m = 2$ vereinfacht. Jetzt lässt sich umgekehrt von der symbolischen Darstellungsebene zur enaktiven übergehen. Wie lässt sich die

Angabe der Lösungsmenge $L = \{2\}$ handelnd repräsentieren? Richtig, es entspricht dem Öffnen der Box. Die verschiedenen Repräsentationsebenen sollen nicht als ein Nacheinander, sondern als ein Nebeneinander verstanden werden.

Hintergründe

Rollen im Unterricht

Es ist wichtig, dass ein Schüler eine beliebige Anzahl von Streichhölzern auf eine Seite des Stiftes legt bzw. in einer Schachtel versteckt. Wenn es der Lehrer tut, dann ist es nicht mehr beliebig. Es kommt also darauf an, wer etwas tut. Wenn zwei Menschen das Gleiche tun, ist es noch lange nicht dasselbe. Es kommt auf die Rolle des Handelnden an. Interessanterweise kann man als Lehrer sehr stark die Anzahl der Hölzer steuern, ohne dass die „Beliebigkeit" verloren geht: „Nimm ein paar mehr, vielleicht so 8, 9 oder 13 Stück."

E-I-S-Prinzip und gehirngerechtes Lernen

Nach dem Hemisphärenmodell sind beide Gehirnhälften für unterschiedliche Prozesse spezialisiert[21]. Links findet eher die sprachliche, formelhafte Verarbeitung, rechts eher die ganzheitliche und körperorientierte statt. Für Bruner spielt die Wechselwirkung zwischen konkreter und formaler Operationen eine entscheidende Rolle. Kurz: Es geht nicht (nur) darum, den Schüler sehr behutsam zu formalen Rechnungen zu bringen, sondern auch umgekehrt soll die formale Handlung konkretisiert werden können. Was bringt ein Umgang mit Symbolen, der keine Bedeutung mehr enthält?

Man kann die Ablehnung der Mathematik eines Schülers, dem die Bedeutung seines formalen Handelns nicht bewusst ist, leicht nachvollziehen. Ab diesem Moment ist der Mathematikunterricht im doppelten Sinne sinnentleert.

9.2 Wie lassen sich negative Zahlen mit Streichhölzern darstellen?

Frieder Korn

Konkrete Umsetzung

Als Beispiel sollen die Schüler eine Lösung der Gleichung $2x - 6 = -x$ finden. Anschließend wird die Gleichung von einem weiteren Schüler, nach dem bereits bekannten Prinzip, gelöst. Hier eine mögliche Lösung.

21 Das Modell gilt in der exklusiven Einteilung in Zuständigkeitsbereiche des Gerhirns (linke Hälfte, rechte Hälfte) als überholt. Für Schwerpunkte und Präverenzen ist das Modell noch gültig.

Gleichung	**Haptische Interpretation**	**Regieanweisung**
	$2x - 6 = -x$	
		Auf beiden Seiten werden sechs Streichhölzer hinzugefügt, in Zeichen: $+ 6$ Umgangssprachlich bringt man die sechs Streichhölzer auf die andere Seite
	$2x = -x + 6$	
		Auf beiden Seiten wird eine Streichholzschachtel hinzugefügt: $+ x$ Umgangssprachlich bringt man die „x“ auf die andere Seite. Danach wird durch 3 geteilt.
	$x = 2$	
	$L = \{2\}$	Schließlich wird die Lösungsmenge abgelesen.

Hintergründe

Ortskodierung

Um den Hölzern und Schachteln einen positiven oder negativen Wert zuordnen zu können, ist das Prinzip der Ortskodierung nötig. Wichtig ist zu Beginn festzulegen, welche Richtung Positivität und welche Richtung Negativität anzeigt. Dabei wird der Unterschied von positiven und negativen Zahlen durch die jeweilige Ausrichtung der Streichhölzer und Schachteln deutlich gemacht. Als Bezugssystem hierzu dient der Stift. Jene Hölzer deren Brennkopf in die Richtung des Stiftdeckels zeigen, sind positiv belegt. Zeigt der Brennkopf in die andere Richtung, handelt es sich um eine negative Zahl. Für die Streichholzschachtel gilt: Die Vorderseite symbolisiert einen positiven, die Rückseite einen negativen Wert.

Umdrehen der Streichhölzer

Beim „auf die andere Seite bringen“ der Hölzer und Schachteln ist es wichtig, die Drehung hervorzuheben. Dabei entspricht das „auf die andere Seite bringen“ dem addieren oder subtrahieren einer Zahl auf beiden Seiten der Gleichung. Die Drehung symbolisiert dabei den Vorzeichenwechsel, der vollzogen wird, wenn Schachteln bzw. Streichhölzer auf die andere Seite gebracht werden. So wird im obigen Beispiel der Schritt ersetzt, zunächst auf beiden Seiten sechs Streichhölzer zu addieren und anschließend die sich neutralisierenden Hölzer auf der linken Seite zu entfernen. Streichhölzer neutralisieren sich, wenn eine gleiche Anzahl an Hölzern mit Ausrichtung nach oben und nach unten auf derselben Seite des Stiftes zu finden ist.

Öffnen der Schachtel

Das Öffnen der Schachtel ist der letzte Moment beim Lösen der Gleichung. Es ist die Präsentation der Lösung. Daher ist es als Lehrer wichtig, darauf zu achten, dass sich die korrekte Anzahl an Streichhölzern in der Schachtel befindet und diese darüberhinaus die richtige Ausrichtung haben (sonst ist nicht ersichtlich, ob es sich um eine positive oder negative Zahl handelt). Ist dies nicht der Fall, bleibt der finale „Aha-Effekt“ aus.

Anhand der Schachtel kann der Lehrer verdeutlichen, dass am Ende kein negatives x mehr übrig bleiben sollte, denn wenn man die Schachtel im „Minusstadium“ öffnet, kann sie nicht entleert werden.

9.3 Zusammenhänger der algebraischen und geometrischen Welt

Christoph Klieber, Jesus Peinado Rubio

An der Tafel erstellen die Schüler gemeinsam das Schaubild einer linearen Gleichung.

Konkrete Umsetzung

Aktive Gruppenbildung

In diesem Aufgabenmodell erfolgt die Bearbeitung in Gruppen. Es werden dazu zwei Gruppen gebildet, zum Beispiel eine Mädchen- und eine Jungengruppe, wobei eine sinnvolle Verteilung gewährleistet sein sollte. Zudem sollte jedem Schüler eine Zahl zugeordnet werden, die im weiteren Aufgabenverlauf von Nöten ist.

Dies kann durch aktives Abzählen der Schüler geschehen. Dazu stehen zunächst alle Mädchen, anschließend alle Jungen, getrennt auf und zählen in ab- oder aufsteigender Reihenfolge durch. Dabei ruft jeder Schüler eine Zahl und setzt sich daraufhin wieder. Es wird solange durchgezählt, bis jedem Schüler eine Zahl zugeordnet wurde.

Es ist wichtig, sich davor klar zu machen, welche Zahlen benötigt werden, um eine geeignete Methode der Abzählung zu wählen. Sind sowohl positive als auch negative Zahlen erwünscht, so kann der Lehrer feststellen wie viele Mädchen/Jungen sich in der Klasse befinden und dann ungefähr bei der Hälfte beginnen lassen, in absteigender Reihenfolge durchzuzählen.

Berechnung der Variablen

Nach der Gruppenbildung gibt der Lehrer zwei Gleichungen vor und teilt jeweils eine Gleichung einer Gruppe zu.

$2y - x = 4$
$3y + x = 11$

Jeder Gleichung werden Zettel in einer Farbe zugeordnet, welche an die jeweiligen Gruppen ausgeteilt werden.

Bei der Gruppenbildung wurde jedem Schüler eine Zahl zugeordnet, die er nun für die Variablen x einsetzen soll, um die noch fehlende Variable y zu berechnen.

Gemeinsames Ergebnis

Jeder Schüler schreibt sein Ergebnis auf einen Zettel und klebt diesen am Ende der Bearbeitungsphase auf ein vom Lehrer an die Tafel gezeichnetes Koordinatensystem.

Hintergründe

Gemeinsame Beteiligung am Tafelbild

Jeder Schüler rechnet persönlich einen Punkt der Geradengleichung aus und trägt diesen an der Tafel in ein Koordinatensystem ein. Da man an einem einzigen Punkt nicht viel erkennen kann, ist es wichtig, dass alle Schüler ihre Punkte an die Tafel tragen. Somit wird eine Klassenabhängigkeit geschaffen, da nur gemeinsam ein Ergebnis entsteht, welches sich mathematisch interpretieren lässt.

Fehler

Je nach Klassenstufe kann das Schaubild der Geraden Ausreißer haben. Dies ist allerdings ein sinnvoll vorkommender Fehler, da so leicht die Auswirkungen einer falsch berechneten Variable gesehen und durch die Auftragung in ein Koordinatensystem gut nachvollzogen werden können.

Lineare Gleichungen als Gerade

Durch die Darstellung der Linearen Gleichung als Gerade können sich viele Schüler erstmals etwas unter einer Gleichung dieser Form vorstellen. Möglicherweise wird zum ersten Mal ein Zusammenhang zwischen verschiedenen Variablen und einem Koordinatensystem oder die räumliche Darstellung einer Gleichung verstanden.

Einteilung in Gruppen

Durch die Einteilung nach diesem Muster kann sichergestellt werden, dass keine Einwände von der Schülerseite bezüglich der Gerechtigkeit der Gruppenzusammensetzung an den Lehrer herangetragen werden. Die Aufteilung nach Geschlechtern wird von jedem akzeptiert, weil das Geschlecht als solches bereits eine natürliche Einteilung in Gruppen darstellt. Beim selbstständigen Durchzählen lernen die Schüler, aufeinander zu achten und einen angemessenen Zeitpunkt zum Sprechen zu finden, ohne einen Klassenkameraden zu unterbrechen.

10 Vektoren

10.1 Addition von Vektoren

Nico Huber

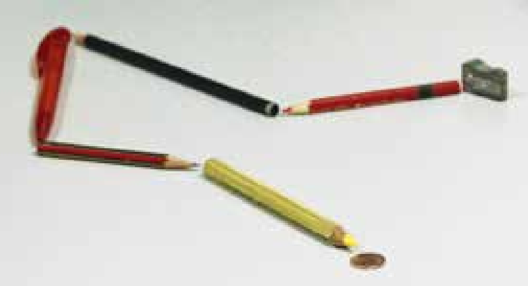
Mit Hilfe von Stiften wird die Kommutativität nachempfunden

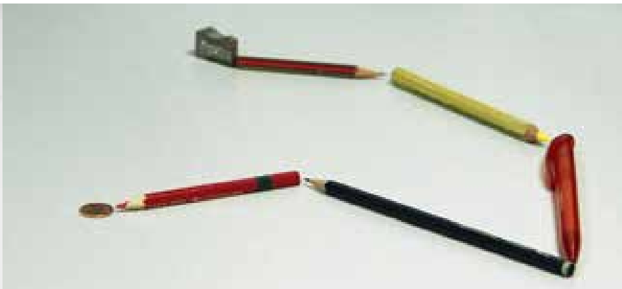
Konkrete Umsetzung

Jeder Schüler legt mit unterschiedlichen Stiften einen Stiftzug, indem er jeweils das Ende eines Stiftes an die Spitze des zuvor gelegten Stiftes legt. Jetzt werden Start- und Endpunkt der Strecke mit Stiftdeckel, Radiergummi oder ähnlichem markiert.

Jeder Stift behält während der ganzen Übung seine Richtung, wie eine Kompassnadel, bei. Im nächsten Schritt dürfen die Stifte unter Beibehaltung ihrer Ausrichtung neu kombiniert werden. Wichtig ist, dass auch hier immer das Ende eines Stiftes an die Spitze eines anderen gelegt wird.

Es wird dabei vom gleichen Startpunkt aus gestartet. Wenn die Schüler die Richtung der Stifte beibehalten, werden sie am gleichen Endpunkt ankommen. Diese Übung funktioniert nicht nur auf dem Tisch, sondern auch im dreidimensionalen Raum.





Hintergründe

Einstieg mittendrin

Für gewöhnlich werden im Unterricht erst Vektoren eingeführt. Die hier vorgestellte Herangehensweise erinnert an Marten Wagenschein. Dem Schüler wird ohne Vorbereitung ein komplexes Problem gestellt. Der Unterricht beginnt sozusagen „mittendrin“.

Projektion der Addition

Die Aufgabe soll den Schülern vermitteln, dass die Addition von Vektoren kommutativ ist. Dabei werden hier anstatt Vektoren Stifte mit fester Richtung verwendet. Demzufolge entspricht das Hintereinanderlegen zweier Stifte der Addition zweier Vektoren.

Die Erklärung kann im zweidimensionalen Falle mit Hilfe einer Projektion erklärt werden. Betrachtet man den Schatten der Stifte, so können hier die Längen als einfache Zahlen addiert werden, von denen wir wissen, dass sie kommutativ sind. Für die Projektion in Richtung y-Achse muss der Overheadprojektor um 90° verschoben werden.

Verschiedene Stifte

Die Verwendung von unterschiedlichen Stiften zeigt, dass die Länge der Stifte vollkommen beliebig ist und keinen Einfluss auf das Ergebnis hat.

10.2 Schatzsuche

Johannes Aderbauer

Vorgestellt wird eine Schatzsuche, die auf der Kommutativität von Vektoren bezüglich der Addition basiert.

Durchführung der Schatzsuche

Die Schüler werden in Gruppen aufgeteilt und erhalten die Richtungskarten jeweils in unterschiedlicher Reihenfolge.

Jede Karte darf nur einmal verwendet werden. Zudem werden die Gruppen mit Kompass und Zollstock ausgestattet. Am Schluss kommen alle im gleichen Zielgebiet an und können zur Belohnung den Schatz ausgraben.

Erstellung der Richtungskarten

Der Lehrer ist klar im Vorteil. Er kennt Vektorrechnung. So kann er einen Rundkurs aus sich aufhebenden Richtungskarten erstellen und diesen noch eine weitere Karte hinzufügen, die dann die eigentliche Entfernung des Schatzes vom Ausgangspunkt darstellt.

Hintergründe

Messfehler und Ungenauigkeit

Die Schüler erkennen, dass Messen immer ungenau ist. Denn trotz Anstrengung und Präzision von ihrer Seite, kommen alle Gruppen an leicht unterschiedlichen Endpunkten an. Sie erfahren aber auch, dass je nach Situation unterschiedliche Größenordnungen und Genauigkeiten wichtig sind. In ihrem Fall spielen wenige Zentimeter im Endergebnis keine Rolle, bei anderen Rechnungen sind sie dagegen entscheidend.

Kommutativität der Vektoraddition

Es wird spielerisch erkannt, dass die Reihenfolge keine Rolle spielt, da alle Gruppen am gleichen Punkt ankommen. Zudem sieht man, dass entgegengesetzte Karten sich gegenseitig aufheben, Karten mit gleicher Richtung eine Addition darstellen. Man kann somit durch vorheriges Addieren beziehungsweise Subtrahieren die Messarbeit deutlich reduzieren. Mathematik spart hier viel Arbeit.

Unterschiedliche Kartenwerte – Variation der Schwierigkeit

Die Übung wird schwieriger, wenn es nicht wie im einfachsten Fall sich genau aufhebende Karten gibt, sondern wenn sich beispielsweise 25,2 Meter Süd mit 12,1 Meter Nord und 13,1 Meter Nord aufheben. Eine zusätzliche Schwierigkeitssteigerung wird durch die Hinzunahme von genaueren Himmelsrichtungen wie Nordwest oder die Angabe von Gradzahlen erreicht.

11 Arithmetik

11.1 Kommutativität anschaulich

Anja Kraus

Die folgende Übung soll den Schülern die Kommutativität bei der Addition und Multiplikation veranschaulichen. Im Falle der Addition soll verdeutlicht werden, dass $2 + 3 = 3 + 2$ und im Falle der Multiplikation, dass $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ gilt.

Konkrete Umsetzung

Kommutativität der Addition

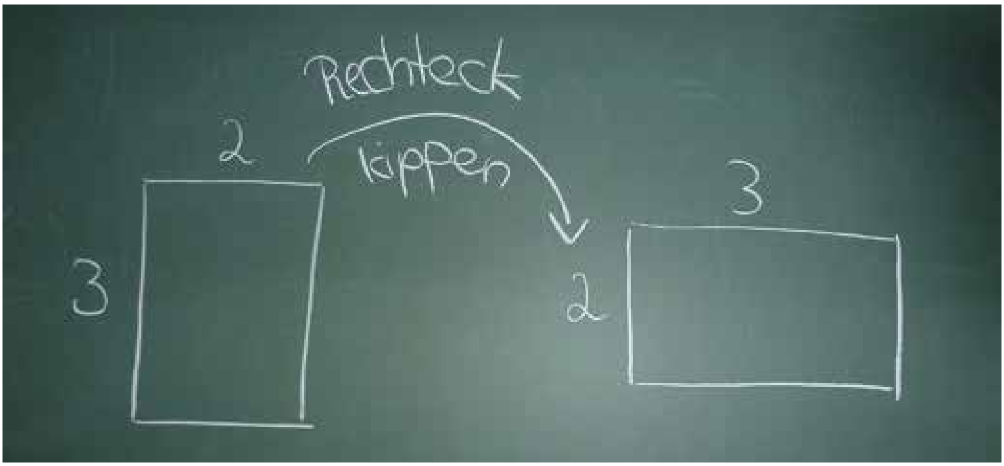
Für die Addition nimmt der Lehrer zunächst zwei Stifte und fügt drei weitere hinzu (2 + 3). Insgesamt hat er nun fünf Stifte. In einem zweiten Schritt nimmt er drei Stifte und fügt zwei hinzu (3 + 2). Wieder hat er insgesamt fünf. Es spielt also keine Rolle, ob man zu zwei Stiften drei hinzufügt, oder zu drei Stiften zwei. Das Ergebnis ist in beiden Fällen fünf.

Kommutativität der Multiplikation

Eine haptische Möglichkeit, die Kommutativität der Multiplikation ($2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$) darzustellen, ist, zunächst drei Schüler sich an den Händen halten und so eine Dreier-Gruppe bilden zu lassen. Ihnen gegenüber stellt sich in gleicher Form eine weitere Dreier-Gruppe. Die Gesamtzahl an Schülern, die sich durch die zwei Dreier-Gruppen ($2 \cdot 3$) ergibt, ist sechs.

Nun lassen sich die Schüler los und nehmen stattdessen die Hand des Schülers, der ihnen gegenüber steht. Es entstehen so drei Zweier-Gruppen ohne dass sich die Gesamtzahl der Schüler verändert hat.

Eine ikonische Möglichkeit für die Erklärung des Kommutativgesetzes bei der Multiplikation ist die Veranschaulichung mit Hilfe eines Rechteckes.



Der Flächeninhalt des Rechtecks im ersten Fall ($3 \cdot 2$) ist genauso groß wie im zweiten Fall .

Bemerkungen

Material

Für die Gegenstände, die der Lehrer benutzt, um die Kommutativität bei der Addition darzustellen, eignen sich besonders Gegenstände, die Schüler stets dabei haben, wie zum Beispiel Stifte.

Erlebnisorientierte Darstellung

Die Veranschaulichung der Kommutativität mit Stiften oder im Rechteck geschieht auf der enaktiven Ebene. Die bildhafte Darstellung der Rechnung fördert das Verständnis der Schüler.

Wenige Wiederholungen reichen dem Gehirn

Um Gesetze wie das Kommutativgesetz zu verallgemeinern, reichen wenige, verschiedene Beispiele aus, indem man die vorher geschilderten Handlungsmöglichkeiten einige Male wiederholt. Das Gehirn kann schon nach zwei bis drei konkreten Beispielen die Regel verallgemeinern.

11.2 „Minus“ mal „Minus“ ergibt „Plus“

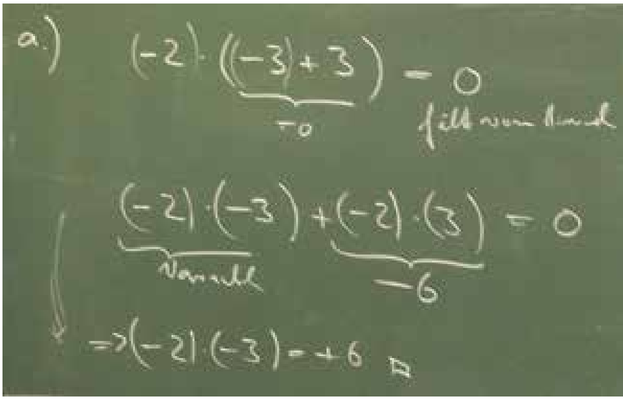
Sebastian Schindler, Dominik Brändle, Sabine Falk und Jens Zipfel

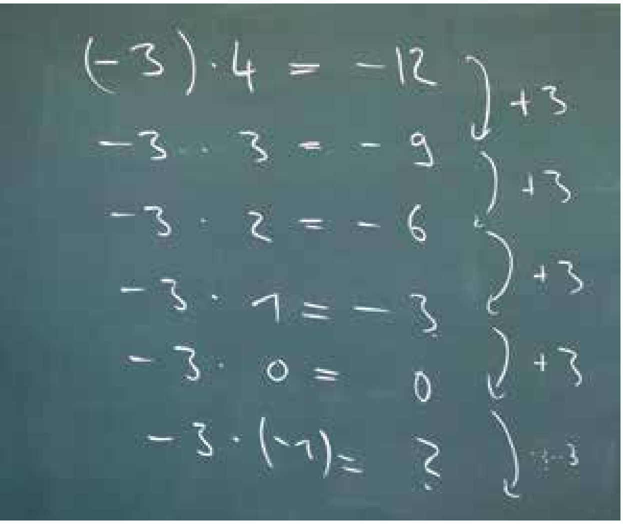
Der folgende Abschnitt zeigt vier verschiedene Möglichkeiten, wie man $(-3) \cdot (-2) = 6$ zeigen kann.

Konkrete Umsetzung

Erklärung mit Hilfe des Distributivgesetzes

Am kürzesten lässt sich der Sachverhalt über das Distributivgesetz aufzeigen. Allerdings fällt bei dieser Darstellung die erste Gleichung vom Himmel, sodass die Konstruktivität verloren geht.



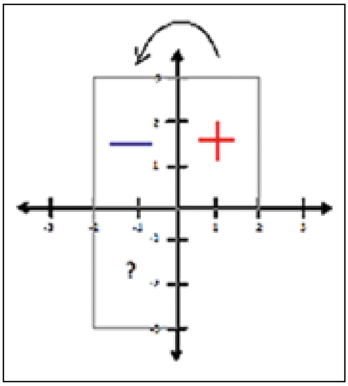


Stetige Fortführung

Diese zweite Möglichkeit ist für einen Schüler der sechsten Klasse verständlich, bleibt aber immer noch auf einer formalen Ebene.

Orientierte Flächeninhalte

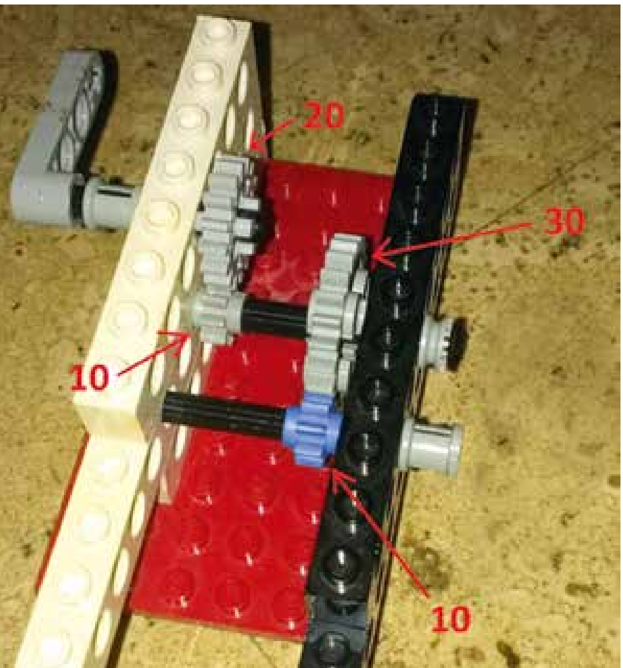
Jeder Schüler schneidet aus Papier ein Rechteck mit der Länge 3 cm und der Breite 2 cm aus. Auf die Vorderseite wird ein „+" geschrieben, auf die Rückseite ein „–". Anschließend wird ein Koordinatenkreuz ins Heft gezeichnet und das Rechteck entsprechend der Abbildung in den ersten Quadranten gelegt. Beide Seiten sind positiv, also ist auch das Produkt positiv, was durch das Pluszeichen auf der Vorderseite angezeigt wird.



Kippt man das Blättchen über die y-Achse, sprich $3 \cdot (-2)$ erhält man für den x-Wert im Sinne einer Spiegelung eine negative Zahl, jetzt zeigt die negative Seite nach oben. Kippt man wiederum das Blättchen, diesmal über die x-Achse, so sind beide Rechteckkanten negativ. Insgesamt wurde das Blättchen zweimal umgedreht und die positive Seite zeigt wieder nach oben. In formaler Schreibweise sieht das so aus: $(-3) \cdot (-2) = 6$.

Vorzeichenwechsel über die Änderung des Drehsinns

Gleiches Thema, völlig andere haptische Interpretation. Die Multiplikation wird als Hintereinanderausführung zweier Übersetzungen gedeutet. Vergleiche auch den Abschnitt „Der Bruch als Verhältnis". In der folgenden Abbildung verdoppelt die linke Übersetzung die Drehzahl, die rechte verdreifacht. Das blaue Rädchen dreht sich entsprechend sechsmal, wenn an der Kurbel einmal gedreht wird.



Im Folgenden wird der Drehsinn mit einem Vorzeichen versehen. Eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn wird positiv gezählt, die Gegenrichtung negativ. Die erste Übersetzung steht daher für „– 2“, die zweite für „– 3“. Bei der Konstruktion wechselt die Drehrichtung insgesamt zweimal, entsprechend dreht sich das blaue Rädchen im Sinne der Kurbel. In Zeichen sieht das so aus: $(-3) \cdot (-2) = 6$.

11.3 Vorstellung von Zahlen – Arithmetik mit Münzen

Caroline Stephan und Ines Klopfer

Zahlen können beispielsweise mit Hilfe von Münzen als Rechteckzahlen dargestellt werden, einige auch als Drei- oder Sechseck.

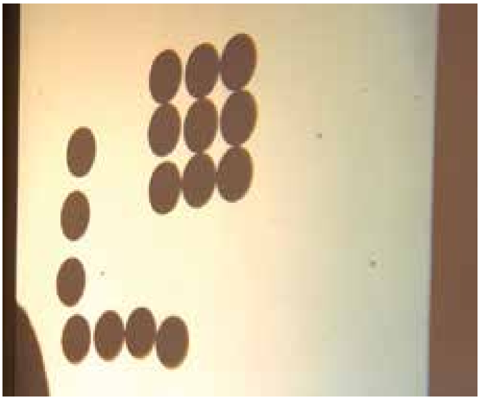
Konkrete Umsetzung

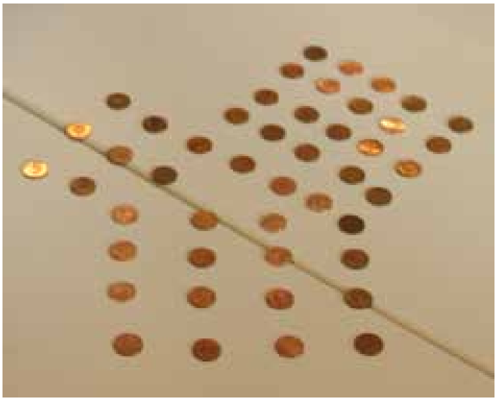
Rechteck-, Dreieck-, Sechseck- und Quadratzahlen

In Bezug auf die Darstellung von Zahlen mit Münzen sind Quadratzahlen und Primzahlen besondere Fälle, letztere können ausschließlich linear als eine Münzenkette dargestellt werden. Zuerst sollen die Schüler die Zahl 25 als Quadrat aus Münzen darstellen, danach 10 als Dreieckzahl und aus diesen beiden Beispielen heraus, können sie selbst eine Sechseckzahl finden.

Haptischer Beweis

Um die Struktur der Quadratzahlen zu beweisen, wird die Gleichung $1 + 3 + 5 + \ldots + 2 \cdot n - 1 = n^2$ für verschiedene n mit Münzen dargestellt, indem man die Aufgabe von der symbolischen auf die enaktive Repräsentationsebene überträgt.





Satz des Pythagoras

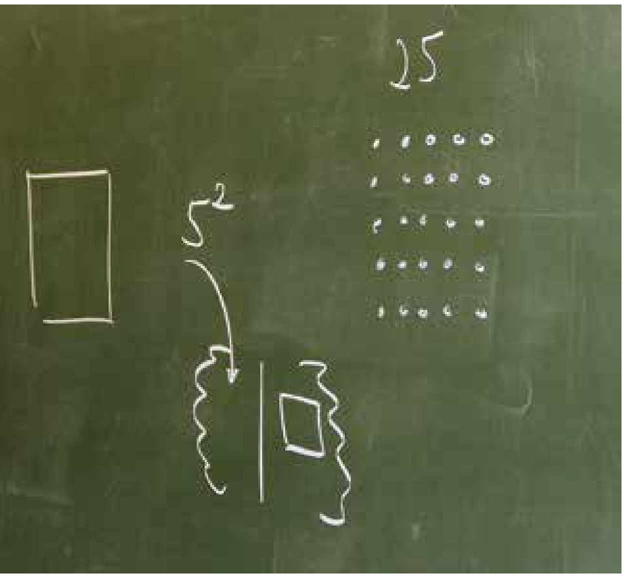
Die Zahl 25 soll als Summe zweier Quadratzahlen dargestellt werden. So wird der Satz des Pythagoras begreifbar, was durch geschicktes Aneinanderlegen der Quadrate gezeigt werden kann.

Allgemein soll aus der Übung erkannt werden, dass sich jede Zahl als Rechteck darstellen lässt, wobei die Primzahlen einen Sonderstatus erhalten.

Hintergründe

Quadratzahlen

Schülern fehlt oft die Assoziation von Quadratzahlen zu einem bildlichen Quadrat. Durch diese Übung sollen sie erkennen, dass eine Quadratzahl wirklich in Form eines Quadrats dargestellt werden kann. Nach dem Hemisphärenmodell entspricht dies einem gehirngerechten Lernen. Beide Gehirnhälften werden zugleich in unterschiedlicher Art und Weise angesprochen.



Wenige Beispiele reichen

Anhand des Beispiels und dem darauffolgenden mit der Dreieckzahl erkennen die Schüler sofort, was eine Sechseckzahl sein muss, denn dem Gehirn reichen ungefähr zwei Beispiele, um eine allgemeine Regel festzustellen.

Beweise enaktiv erfahren

Im Beweis der Gleichung mit den quadratischen Zahlen kann man erkennen, wie sich schwierige und komplexe, mathematische Strukturen der symbolischen Ebene auf der enaktiven Ebene besser veranschaulichen lassen. Es ist dabei besonders zu beachten, dass für uns die symbolische Ebene oft einfacher ist, weil wir sie, im Gegensatz zu den Schülern, schon lange gewohnt sind. Deshalb ist es wichtig, häufig auf die haptische Ebene zu wechseln, damit die Kinder ein Gefühl dafür bekommen, was die symbolische Darstellung für einen Sinn und Zweck erfüllt. Außerdem erhalten die Schüler ein mengenhaftes Verständnis von Zahlen, da sie diese nicht nur als Symbole sehen, sondern sie haptisch erfahren.

11.4 Einführung in die Potenzrechnung

Clara Völklein und Paul Härtlein

Die Bedeutung von 2^5, 2^{-3}, 2^0 wird handelnd erfahren. Die Schüler beschäftigen sich in großen Teilen selbstständig mit dem Thema Potenzen und entwickeln Lösungen ohne Fremdbestimmung. Der Lehrer wechselt in dieser Unterrichtsskizze vom Dozierenden immer weiter zum Moderator.

Konkrete Umsetzung

Stundeneinführung

Wie oft kann das DinA4 Papier gefaltet werden? Wie die Schüler selbst erfahren werden, geht es genau sechs Mal.

Diese Aufgabe eignet sich gut als Unterrichtseinstieg, da es die Schüler zum Thema der Stunde hinführt. Die Schüler werden auf die übergeordnete

Problemstellung der Stunde aufmerksam gemacht und ihre Neugier wird geweckt. Die Übung sollte zwischen 5 und 10 Minuten in Anspruch nehmen.

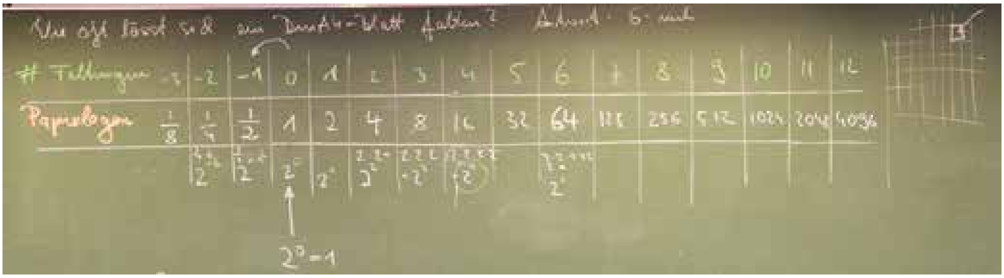
Erarbeitungsphase: Einführung in die Potenzschreibweise und ihrer Bedeutung.

Durch das Falten sind 64 Lagen Papier entstanden. Wer dies nicht glaubt, kann nachschauen. Der Lehrer zeichnet folgende Tabelle an die Tafel und trägt diesen Wert zuerst ein.

Der Rest der Tabelle wird parallel zum schrittweisen Auffalten ausgefüllt. Es werden anschließend, auch wenn praktisch nicht möglich, die Anzahl der Papierlagen für mehr als sechs Faltungen eingetragen. Die Anzahl der Lagen nimmt dabei sehr schnell zu.

Anzahl Faltungen							1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Anzahl Papierlagen							2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
Anzahl Papierlagen in (Zweier-) Potenzen																	

Besitzen negative Hochzahlen eine Bedeutung? Man muss sich vorstellen, das Din-A4 Papier würde in seiner Dicke jeweils halbiert und aufgeklappt werden. Die Anzahl der gedanklichen Auffaltungen wären negativ und es ergäben sich für die Papierlagen Brüche.



Am Ende wird die jeweilige Anzahl der Papierlagen in Zweierpotenzen ausgedrückt. Die Potenzen werden in gleicher Farbe, wie die Faltungen geschrieben.

Anzahl Faltungen	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Anzahl Papierlagen	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
Anzahl Papierlagen in (Zweier-) Potenzen	2^{-5}	2^{-4}	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}

Bei dieser Vorgehensweise wird auch die Bedeutung der Null im Exponenten klar. Keine Faltung entspricht einer Lage Papier.

Schluss – eine abschließende Schätzfrage

Wie oft müsste das Papier gefaltet werden, damit man bis zum Mond kommt?

Für die ca. 380 000 km benötigt man „nur“ 42 Faltungen, da

$$0{,}1\,\text{mm} \cdot 2^{42} \approx 440\,000\,\text{km}$$

Mögliche Hausaufgabe

Erkläre einem Erwachsenen, warum 42 Faltungen reichen, um zum Mond zu gelangen. Der Erwachsene soll anschließend mit ein paar Sätzen ins Matheheft des Schülers schreiben, wie gut er den Sachverhalt verstanden hat.

Hintergründe

Falten und formale Schreibweise

Die formale Beschreibung von Potenzen erhält durch synchrones Falten unmittelbar eine reale Bedeutung. Wichtig ist, dass das Falten gleichzeitig mit dem formalen Aufschrieb erfolgt. Dadurch, dass das Thema auf zwei Ebenen unterrichtet wird, ist ein tieferes Verständnis eher möglich, als wenn nur auf einem Kanal, meist auf dem formalen, gesendet wird.

Große Zahlen, kleine Zahlen

Den Durchmesser einer Galaxie oder eines Atoms könnte man ohne Potenzen nicht darstellen, zumindest bräuchte man sehr viel mehr Platz. Aufgrund der absichtlich sehr klein gewählten Kästchen passen größere Zahlen nicht mehr in das Tabellenformat. Die Zweierpotenzen lassen sich jedoch ohne Probleme in die Tabelle eintragen, sodass die Schüler einen Nutzen in der Potenzschreibweise erkennen.

Exponentielles Wachstum lässt sich schwer schätzen

Die Schüler liegen in ihren Schätzungen oft weit darüber, d. h. unterschätzen das schnelle Ansteigen des exponentiellen Wachstums. Das Beispiel, dass sie „nur“ 42 mal falten müssten, damit das Papier so dick ist, dass es bis zum Mond reicht, ist sehr einprägsam und wirkungsvoll für Schüler.

11.5 Ein Schlüssel zum Lösen von Potenzaufgaben

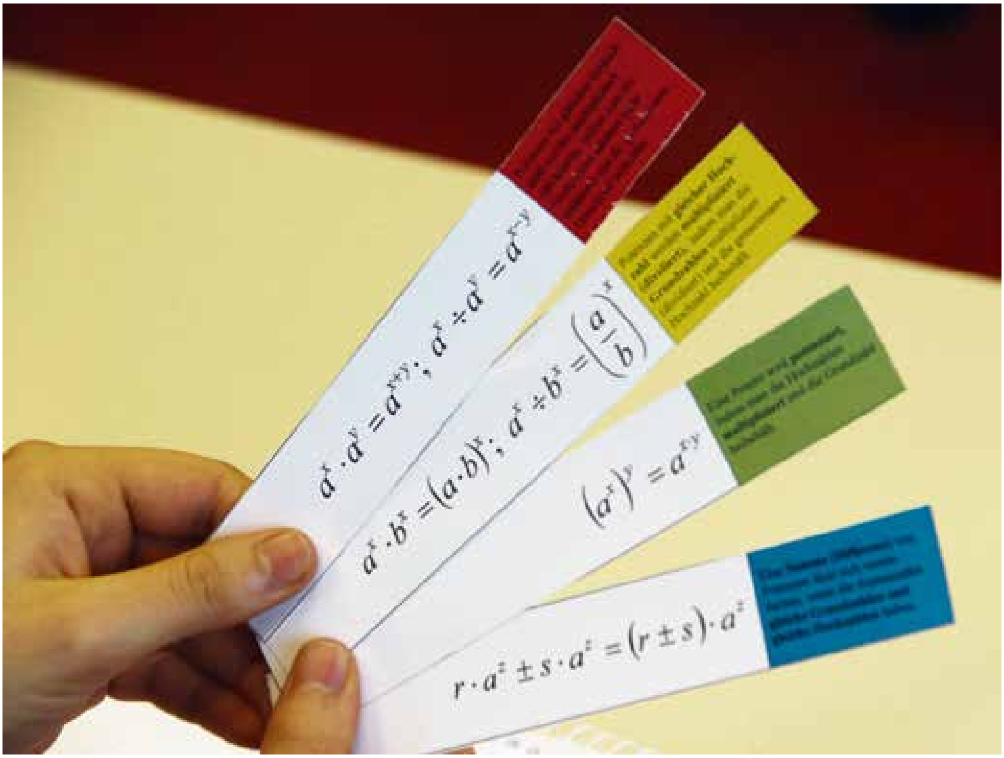
Yannick Fautz

Im Folgenden werden Potenzaufgaben durch das Personalisieren von Rechengesetzen gelöst.

Konkrete Umsetzung

Vorbereitung

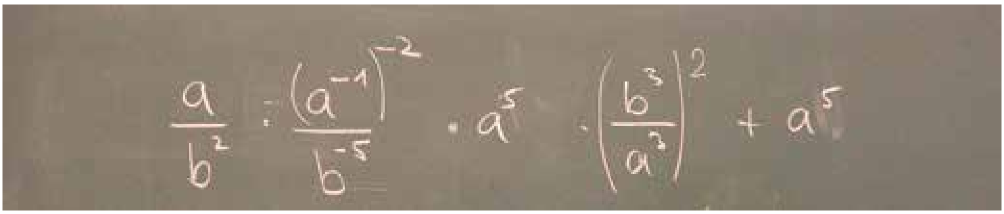
Der Lehrer sollte eine Vorlage anfertigen, auf der sich die vier Potenzgesetze in Form von Streifen befinden. Die Schüler benötigen für jedes Potenzgesetz einen farbig markierten Streifen. Zur farblichen Kodierung der einzelnen Rechenregeln eignen sich die Farben rot – gelb – grün – blau.



Durchführung

Ein Term soll an der Tafel vereinfacht werden. Dieser sollte möglichst so komplex sein, dass alle Gesetze Anwendung finden.

Beispiel



Vier Schüler, die Kleidungsstücke in den entsprechenden vier Farben tragen, werden nach vorne gebeten. Sie vertreten jeweils die Potenzregel ihrer Farbe.

Zuerst entscheidet sich jeder Schüler, mit welchem Gesetz er den Term vereinfachen würde. Parallel werden die farbigen Streifen hochgehalten.

Nach Betrachtung des Stimmungsbildes führt ein „Gesetz“ eine Vereinfachung des Terms mit der passenden Farbkreide durch. Nachdem auch ein bis zwei weitere Aufgaben erfolgreich an der Tafel gelöst wurden, kann entsprechend in

Vierergruppen weitergearbeitet werden. Jede Farbe wird dabei von einer Person repräsentiert.

Hintergründe

Farbe und nonverbale Kommunikation

Die Farben unterstützen die Personalisierung der Rechengesetze. Durch Hochhalten der farbigen Streifen können die Schüler anzeigen, welcher Vereinfachungsschritt als nächstes durchgeführt werden soll. So findet die nonverbale Kommunikation in dieser konkreten Umsetzung mittels Farbkodierung statt.

Freundliche Lernumgebung

Stellvertretend für die unterschiedlichen Potenzregeln stehen vier Schüler an der Tafel. Kommt ein Schüler ins Stocken, kann dieser von jedem Schüler Hilfe erhalten, der seine Farbe hochgehalten hat.

Haptisches Lernen

Erinnerungen geraten nicht so schnell in Vergessenheit, wenn man Gegenstände besitzt, mit denen diese verknüpft sind. In diesem Fall ist es der angefertigte, farbige Schlüsselbund, den letztlich jeder Schüler mit nach Hause nehmen kann.

Die Verwendung des Wortes Schlüsselbund rührt von der Form der zusammengeklammerten Papierstreifen. Außerdem erscheint die Metapher des Schlüsselbundes als sehr treffend, da die Potenzregeln mit den dazugehörigen Farben einem Bund mit vier Schlüsseln gleichen, wodurch Schritt für Schritt beziehungsweise „Tür für Tür“ die Lösung erschlossen wird.

11.6 Das Potenzieren

Angelina Ruhland

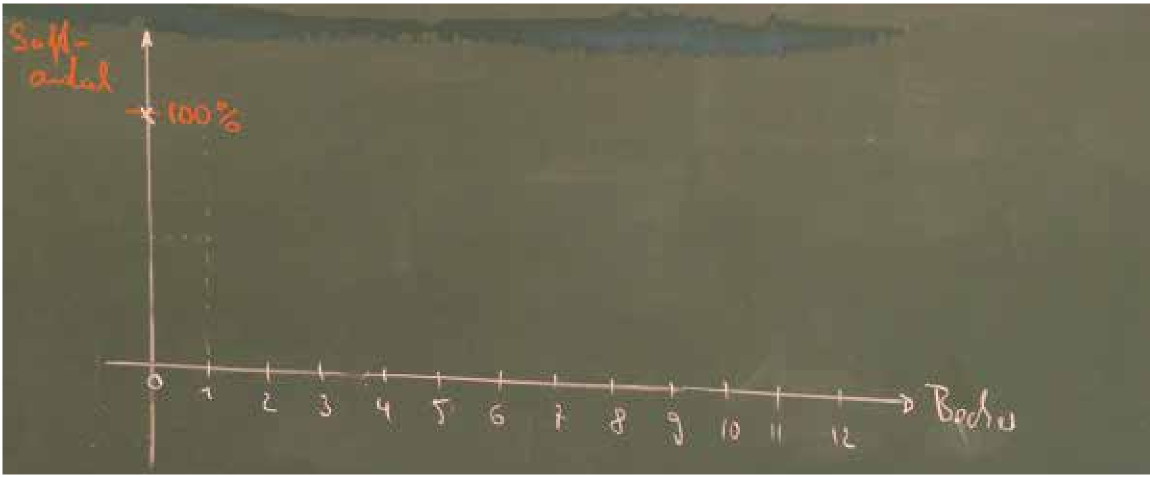
Konkrete Umsetzung

Material

Augenbinde, dunkler Saft (z. B. Traubensaft), Leitungswasser (in Flaschen abgefüllt), wasserfester Filzstift, 15 durchsichtige Plastikbecher (0,2l Volumen).

Für dieses Experiment benötigt man einen freien Platz vor der Tafel und einen Tisch. Dreizehn Becher werden von 0–12 mit dem Filzstift durchnummeriert. Die Becher 1–12 werden zur Hälfte mit Leitungswasser gefüllt.

Der Becher mit der Aufschrift 0 wird mit 100% Traubensaft gefüllt. Ebenfalls wird ein Koordinatensystem an die Tafel geschrieben, in dem sich später der Saftanteil eines jeden Bechers eintragen lässt.



Nachdem die Schüler die Becher gleichmäßig gefüllt haben, stellt der Lehrer die Becher der Reihe nach auf einem Tisch vor der Tafel auf.

Nun werden zwei Schüler gebeten nach vorne zu kommen, um die Becher umzugießen und zugleich den Saftanteil in das Diagramm einzutragen. Die Hälfte des Inhalts des 0. Bechers wird von einem Schüler in den 1. Becher gegossen. Anschließend wird die Hälfte des 1. Bechers in den 2. Becher gefüllt und so weiter, bis alle Becher einen gewissen Saftanteil enthalten.

Bis zu welcher Potenz trauen es sich die Schüler zu, den Becher Unendlich von einer Potenz, nur durch riechen und schmecken, zu unterscheiden? Die Antwort wird durch Fingerzeigen deutlich.

Nun werden drei Becher nebeneinander auf einen Tisch gestellt. Ein Freiwilliger kommt nach vorne und ihm werden die Augen verbunden. Dann wird die Frage gestellt, wie viel Prozent Fruchtsaftgehalt der Becher mit der Fruchtmischung enthält. Nachdem die Augen verbunden wurden, wird Leitungswasser in zwei weitere Becher gefüllt. Damit man tatsächlich den Saftgehalt untersucht und nicht den Geruch eines Eddings, werden alle Becher beschriftet. Die mit Leitungswasser erhalten ein „∞“-Zeichen.

Zum Schluss kann man mit Hilfe des Diagramms die Formel des Graphen herleiten:

$$n \to 0{,}21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Hintergründe

Gesetz der Gleichzeitigkeit

Das Gesetz besagt, dass Elemente, die sich gleichzeitig bewegen auch zusammen gehören. So werden bei den Schülern, die enaktive Ebene (Becher) und die symbolische Ebene (Tafeldiagramm) verknüpft.

Aufbau eines persönlichen Bezugs

Die Schüler werden selbst ein Teil des Experiments und das steigert sowohl die Konzentration als auch die Lernbereitschaft. Den Schülern fällt es leichter, sich an Dinge zu erinnern, die sie selbst erlebt haben.

Aspekt der Sinnlichkeit

Gerüche und Geschmäcker bleiben tief haften, darum können sich die Schüler leichter an dieses Experiment erinnern.

11.7 Plädoyer für vernetztes Lernen

Johannes Hauptmann

Am Beispiel der Potenzgesetze wird exemplarisch gezeigt, wie uns ein Thema in der ganzen Schulmathematik wieder und wieder begegnet.

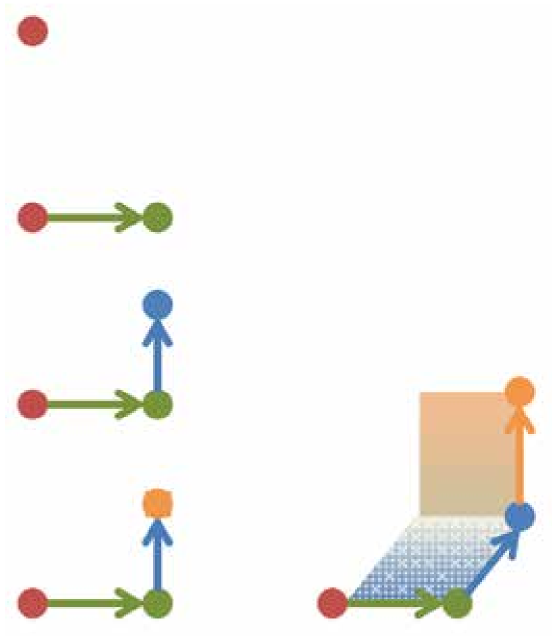
- 1. Potenz als Dimension
  Verschiebt man einen Punkt um 10 Längeneinheiten, erhält man eine Strecke, nämlich 10^1. Verschieben wir das Resultat erneut senkrecht zur ersten Richtung um 10 Längeneinheiten, so ergibt sich ein Quadrat, 10^2. Führen wir diese Verschiebung ein drittes Mal durch, bekommen wir einen Würfel, 10^3.

„Nullte“-Dimension: 10^0

„Erste“-Dimension: 10^1

„Zweite“-Dimension: 10^2

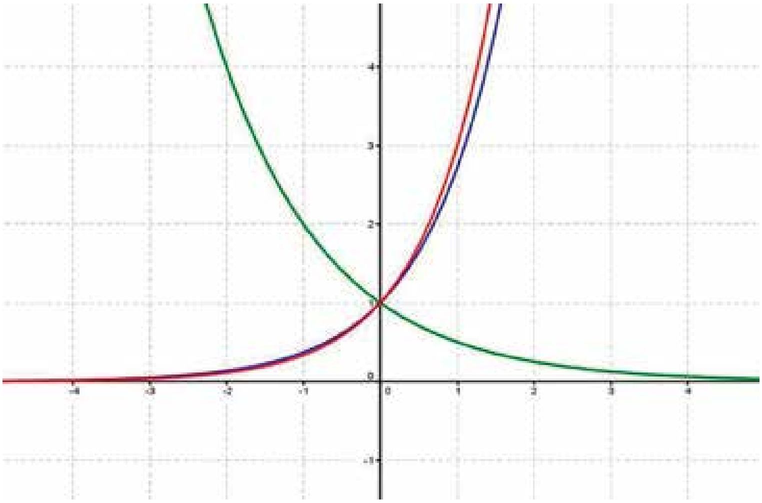
„Dritte“-Dimension: 10^3



- 2. Stellenwertsystem
  Auch unser Zahlensystem ist von exponentieller Natur. So steht zum Beispiel die Zahl 123,4 für $1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1}$.

- 3. Arithmetik
  Rechenregeln für Potenzen sind Bestandteil der Arithmetik: $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4}$.
  Auch gäbe es ohne Potenzen keinen Logarithmus.

- 4. Potenzfunktion
  Beispiele hierfür wären $f(x) = 3^x$, $f(x) = 0{,}5^x$ oder $f(x) = e^x$.

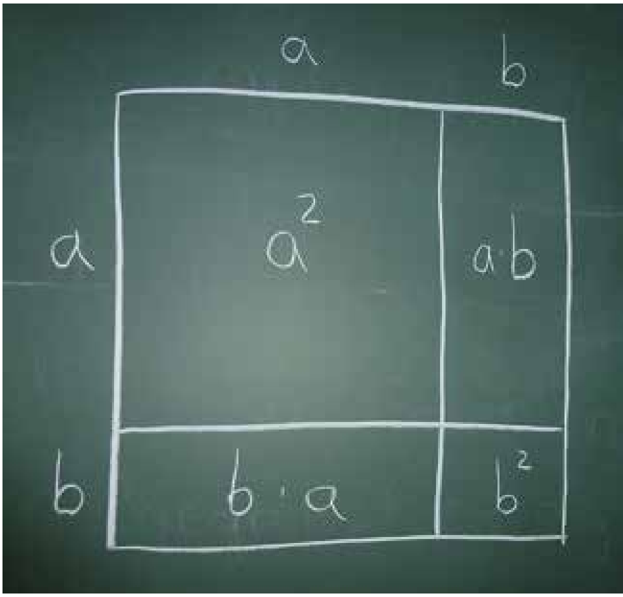


- 5. Wachstum
  Potenzen spielen beim exponentiellen Wachstum bzw. Zerfall eine enorme Rolle. Siehe hierzu das Experiment zum Zerfall von Bierschaum.

- 6. Wahrscheinlichkeitsrechnung
  Bei mehrfacher Wiederholung unabhängiger Zufallsexperimente werden Potenzen zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit verwendet. So kann man beispielsweise die Wahrscheinlichkeit bestimmen, drei mal hintereinander eine Sechs zu würfeln: $\left(\frac{1}{6}\right)^3$.

11.8 Binomische Formel

Anja Kraus



Konkrete Umsetzung

Um Schülern die Lösung der ersten binomischen Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ zu veranschaulichen, ist es hilfreich, diese ikonisch oder enaktiv darzustellen. Dies geschieht mit Hilfe von Flächeninhalten von Quadraten bzw. Rechtecken.

Erweiterung

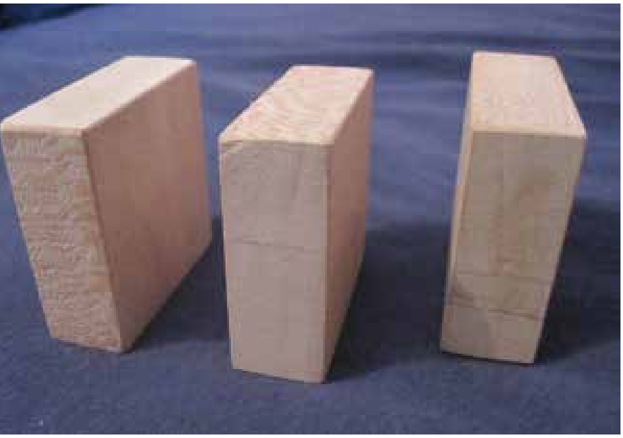
Zur Übung können die Schüler als Hausaufgabe ein Modell zur Darstellung der folgenden Rechnung anfertigen:
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Die Lösung besteht aus einem dreidimensionalen Würfel, der in einzelne Quader und Würfel zerlegt werden kann.

Der Würfel hat Seitenkanten der Länge $a + b$. Sein Volumen wird berechnet durch $(a + b)^3$. Der große Würfel lässt sich in kleinere Quader und Würfel zerlegen.

Dabei entstehen je ein Würfel mit dem Volumen a^3 und b^3 … ,

… drei Quader mit dem Volumen ab^2…



… und drei Quader mit dem Volumen $a^2 \cdot b$.

Das Volumen des großen Würfels besteht also aus der Summe der Volumen der kleineren Würfel und Quader
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Hintergründe

Enaktive Ebene

Auch bei dieser Übung wird die Rechnung auf der enaktiven Ebene dargestellt und anschließend auf die formale Ebene übertragen. Indem die Schüler selbst den Würfel bauen, können sie die Schritte besser nachvollziehen.

11.9 Eine theatrale Methode zur Einführung der vollständigen Induktion

Markus Schachtner und Michael Esser

Konkrete Umsetzung

Nach dem Vorbild „Stille Post“ wird das Prinzip der vollständigen Induktion eingeführt. Hierfür werden mehrere freiwillige Schüler benötigt. Der Lehrer flüstert dem ersten Freiwilligen eine Kurzszene ein. Diese soll er dann pantomimisch darstellen.

Als Beispiel könnte der Kauf einer Kiste Sprudel im Supermarkt dienen.

Von den übrigen Freiwilligen schaut nur einer still zu und prägt sich die Szene möglichst genau ein.

Im nächsten Schritt wird der Zuschauer zum Akteur und ein weiterer Freiwilliger prägt sich dessen nachgespielte Szene ein.

Interpretation

Induktionsbehauptung	Jeder Schüler kann die Szene spielen.
Induktionsanfang	Der erste Schüler spielt die Einkaufsszene.
Induktionsvoraussetzung	Die ersten *k* Schauspieler müssen das Stück korrekt gespielt haben.
Induktionsschritt	Übergang von *k* auf *k*+1: Der *k*+1-te Schüler spielt den Einkauf korrekt nach.

Die Stärke der Übung liegt darin, dass die vollständige Induktion an einem Beispiel ohne Zahlen erläutert wird. Der Humor bei der Übung liegt in den unvollkommenen Kopien der jeweils vorangehenden Szenen. Der Schüler lernt somit den Induktionsschritt an einer fehlerbehafteten Darstellung.

Analysis

12 Funktionen

12.1 Einführung von Funktionen

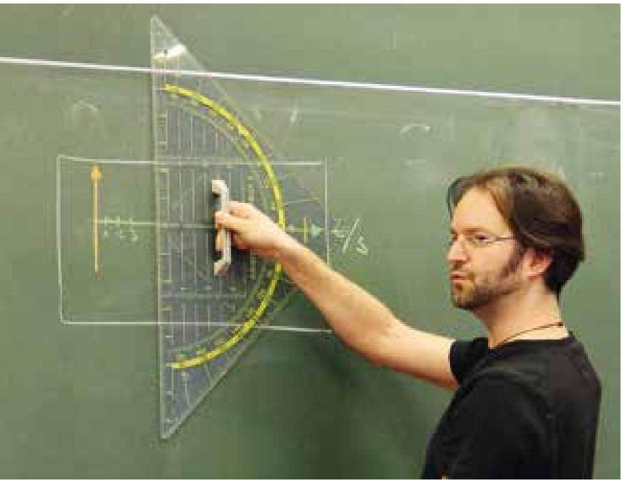
Natasha Fix, Jannick Bieger, Christian Linke und Samuel Roth

Es soll der Weg einer Ameise, die an der Kante eines Geodreiecks auf und abläuft als Funktion der Zeit dargestellt werden.

Konkrete Umsetzung

Benötigte Materialien

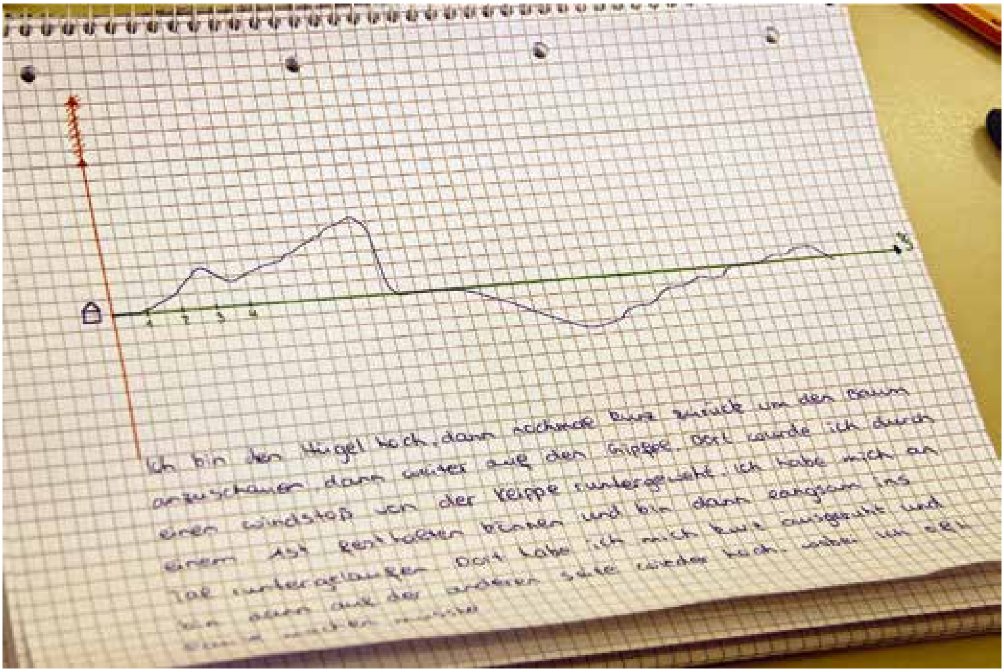
- Din-A4-Blatt (möglichst kariert)
- Geodreieck
- grüner und roter Stift, Bleistift



Es arbeiten jeweils zwei Schüler in unterschiedlichen Rollen zusammen und zeichnen auf das Din-A4-Blatt im Querformat die y-Achse als roten Pfeil nach oben und die x-Achse als grünen Pfeil nach rechts ein. Dabei wird ca. ein Drittel des Blattes unter dem Achsenkreuz freigehalten. Der grüne Pfeil wird in 1 Zentimeter-Abstände eingeteilt, wobei er die Zeit in Sekunden symbolisiert.

Einer der Schüler ist für die x-Achse zuständig und nimmt das Geodreieck in die Hand, legt es mit der Kante auf den roten Pfeil und bewegt es mit einer Geschwindigkeit von ca. 1 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ nach rechts, während der andere Schüler für die y-Achse zuständig ist und in die Rolle der „Ameise“ schlüpft. Er bewegt den Bleistift stets entlang der Kante des Geodreiecks nach oben und unten, sodass eine Kurve entsteht, die den Ort der Ameise als Funktion der Zeit darstellt.

Die zweite Aufgabe der Schüler besteht darin, eine Geschichte zu schreiben, die den Spaziergang aus Sicht der Ameise beschreibt. Dazu wird die zuvor auf dem Blatt freigehaltene Fläche verwendet.



Geschichte unter dem Schaubild:
„Ich bin den Hügel hoch, dann nochmal kurz zurück, um den Baum anzuschauen, dann weiter auf den Gipfel. Dort wurde ich durch einen Windstoß von der Klippe runtergeweht. Ich habe mich an einem Ast festhalten können und bin dann langsam ins Tal runtergelaufen. Dort habe ich mich kurz ausgeruht und bin dann auf der anderen Seite wieder hoch, wobei ich oft Pause machen musste.“

Im nächsten Schritt wird das Schaubild mit Hilfe eines Heftes oder Buches abgedeckt, sodass nur die Geschichte zu sehen ist. Nun bewegen sich die Schüler frei im Raum, lesen die Geschichten der anderen und überlegen, wie die Funktion verlaufen könnte. Dabei wird immer mit einem oder mehreren Schülern, die dieselbe Geschichte lesen, über diesen Verlauf diskutiert.

Hintergründe

Eindeutigkeit von Funktionen erfahren

In der Übung wird der Bezug zwischen x- und y-Werten einer Funktion verdeutlicht. Es wird klar, dass ein Punkt des Funktionsgraphen zwei Aussagen enthält: einmal den x-Wert und einmal den y-Wert. Hierbei findet eine Projektion in zwei Richtungen statt. Meistens ist den Schülern schon bewusst, dass jeder x-Wert genau einen y-Wert hat.

Zum Test kann der Lehrer ein Herz in das Koordinatensystem malen und die Schüler fragen, ob das ein Weg der Ameise sein kann. Wenn die Schüler lachen, zeigen sie, dass sie das Konzept verstanden haben.

Ikonische und symbolische Ebene

Hier ist das E-I-S-Prinzip (J. S. Bruner) zu erkennen. Das Schaubild ist eine ikonische *(bildhafte)* Darstellung und die Geschichte, also die Funktionsvorschrift, wird auf symbolischer *(formaler)* Ebene geschrieben. Didaktisch gesehen findet hier immer ein Sprung in zwei Richtungen statt: einmal vom Schaubild zur Funktion (wie muss die Geschichte lauten, wenn man das Schaubild vor Augen hat?) und einmal von der Funktion zum Schaubild (wie sieht der Verlauf der Geschichte aus?). Auf diese Weise wird die Vorstellung einer Funktion geschult.

Von der Ameise zur Differentialrechnung

Vorteil dieser Herangehensweise ist, dass man bereits Themen, die eigentlich erst viel später auftreten, anschaulich erklären und verständlich machen kann. So kann man beispielsweise über Extremwerte diskutieren. Die anschauliche Bedeutung von $f'(x) = 0$ für einen Hochpunkt ist, dass die Ameise zuerst nach oben und dann nach unten läuft (dies stellt den Vorzeichenwechsel von + nach − in der Ableitung dar). Analoges gilt für einen Tiefpunkt. Auf diese Weise lässt sich eine eher abstrakte Vorstellung, die erst in der Kursstufe auftritt, sehr einfach beschreiben.

Einstieg mittendrin

Das hier beschriebene Vorgehen lehnt sich an Martin Wagenstein an. Man steigt in ein neues Thema nicht ganz unten mit den einfachsten Grundlagen ein, sondern beginnt mit einem interessanten Beispiel.

Mit der Frage, was die einfachste Bewegung der Ameise ist, beginnt die Abstraktion. Somit ist der Weg zu linearen Funktionen gebahnt.

Kreativität

Eine reale und handlungsorientierte Aufgabe hat den Vorteil, dass durch das Schreiben eigener Geschichten bei den Schülern die Kreativität gefördert wird, sie lernen sich auszudrücken und mathematische Fragestellungen mit Hilfe von Sprache zu formulieren. Dadurch wird Mathematik verbalisiert.

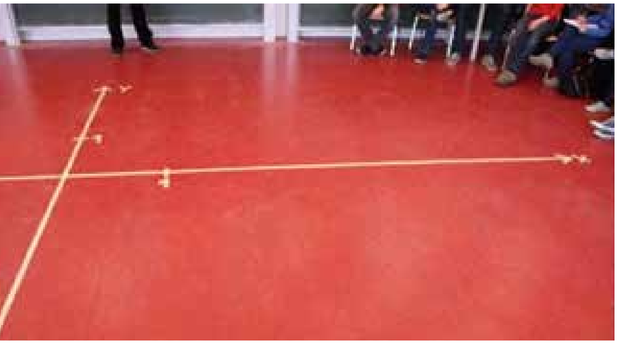
12.2 Das lebende Koordinatensystem

Patrick Henninger, Nikolai Dettling und Björn Schöneich

Die Schüler erfahren am eigenen Leib, wie ein Koordinatensystem aufgebaut ist, wie Spiegelungen wirken und Schaubilder von Funktionen aussehen.

Durchführung

Der Lehrer klebt mittels eines Kreppbandes ein Koordinatensystem auf den Boden. Die Achsen werden mit x und y beschriftet und die Einheiten so gewählt, dass das Koordinatensystem mindestens die Ausmaße von −5 bis 5 auf beiden Achsen hat und die Schüler ausreichend Platz haben, auf den ganzzahligen Abschnitten nebeneinander zu stehen.



Gewöhnungsphase

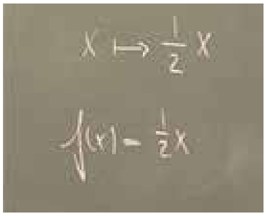
Zunächst stellt sich jeder Schüler auf einen Punkt mit ganzzahliger Koordinate, z. B. (3 | −4). Diesen stellt der Schüler mit seinen Fingern dar. Die linke Hand steht für die x-Koordinate und die rechte Hand für die y-Koordinate. Bei positiven Zahlen zeigen die Finger nach oben, bei negativen nach unten.

Heben die Schüler die linken Hände, sieht jeder, dass sein Vorder- und Hintermann dieselben Werte anzeigt. Analog zeigen die Hände aller Mitschüler auf der rechten bzw. auf der linken Seite die gleichen Werte.

Eine komplexere Aufgabe

Was bewirkt das Vertauschen der x- und y-Werte? Dem Leser ist klar, dass dies einer Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden entspricht. Den Schülern ist aber im Allgemeinen noch nicht klar, dass es sich um eine Spiegelung handelt. Analog können auch Spiegelungen an der x- und y-Achse behandelt werden.

Funktionen darstellen



Die Klasse wird in zwei gleichgroße Gruppen eingeteilt. Von Gruppe 1 stellen sich 11 Schüler auf die ganzzahligen Koordinaten der x-Achse. Dies ist nun ihr x-Wert. Währenddessen überlegt sich Gruppe 2 eine Funktion und schreibt diese gut sichtbar für Gruppe 1 an die Tafel.

Die Schüler auf dem Koordinatensystem berechnen anhand ihres x-Wertes den y-Wert und positionieren sich entsprechend. Um Gruppe 1 ein Zeichen zu geben, dass sie die Aufgabe gelungen gelöst haben, klatscht Gruppe 2, sobald alle Schüler aus ihrer Sicht richtig stehen. Steht jemand ihrer Meinung nach nicht korrekt, so sind sie dazu angehalten diesen eigenhändig an den ihrer Meinung nach richtigen Platz zu stellen.

Jetzt stellt Gruppe 1 eine Aufgabe. Auch hier kann der Schwierigkeitsgrad beliebig verändert werden.

Während Schüler in den unteren Jahrgangsstufen lineare Funktionen behandeln werden, können in der Kursstufe so auch trigonometrische oder exponentielle Funktionen abgefragt werden.

Hintergründe

Indirekte Abfrage

Die Übung legt einige Kompetenzen der Schüler offen, ohne eine einzelne Person gezielt abzufragen. Zwar müssen die Schüler ihre Aufgaben selbst lösen, jedoch in einem sicher erscheinenden Umfeld. Niemand wird vorgeführt. Es kommt zur Interaktion zwischen den Schülern, da sie sich gegenseitig unterstützen und korrigieren können. Der Lehrer kann häufig auf den ersten Blick erkennen, wer das Thema verstanden hat und wer nicht.

Lehrerrolle

Die Aufgaben stellen sich die Schüler dabei gegenseitig. Für den Lehrer ist es interessant zu beobachten, was die Schüler als schwere Aufgaben ansehen und was als leicht lösbar gilt. Darüber hinaus kann der Lehrer als Schiedsrichter und damit auch als „Verteidiger“ auftreten, sollten die Fragen der Gegenseite zu schwer gestellt sein. Ziel ist, dass sich der Lehrer als Spielleiter weitestgehend aus dem Spielgeschehen herausnimmt und nur noch als Beobachter fungiert.

12.3 Schaubilder abfragen über Körperhaltung

Julia Boros

Konkrete Umsetzung

Der Lehrer fragt verschiedene Funktionen ab, welche die Schüler mithilfe ihrer Körperhaltung darstellen sollen.

Parabel

Der Lehrer schreibt eine Funktion, beispielsweise $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ an die Tafel. Die Schüler stellen mit Hilfe ihrer Arme das Schaubild der Funktion dar.

Um Funktionen wie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ darzustellen, müssen sich die Schüler auf den Stuhl stellen.

Winkel

Die Schüler bilden mit ihren Händen einen Zeiger und schließen ihre Augen. Der Lehrer nennt hintereinander Bogenmaße oder Winkel, z. B. 30 Grad oder $\frac{3\pi}{4}$. Nun führt jeder Schüler die Drehung aus. Es können auch mehrere Winkel hintereinander abgefragt werden.

Zusätzlich wird die Einzelabfrage durch das Entfernen der visuellen Komponente verstärkt.

Lineare Funktionen

Auch lineare Funktionen können dargestellt werden. Hierzu muss, im Gegensatz zu symmetrischen Parabeln, ein Koordinatensystem an die Tafel aufgeschrieben werden, damit sich die Schüler orientieren können, wo die positiven und wo die negativen Achsen sind.

Hintergründe

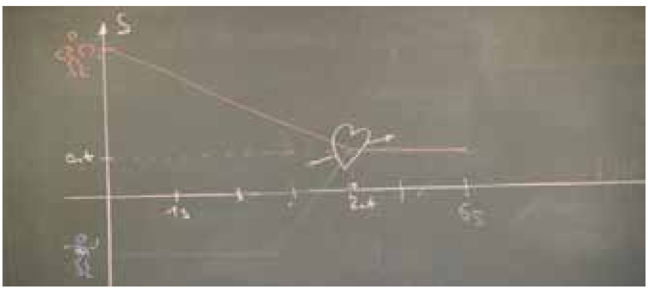
Keine Bloßstellung

Durch die synchrone Abfrage wird nach dem Prinzip der nonverbalen Kommunikation kein Schüler vorgeführt. Die Gefahr der Bloßstellung wird ausgeschlossen, der Lehrer dient ausschließlich als Leitperson und schafft eine angenehme Lernumgebung. Dennoch sieht er auf einen Blick, wer die Parabelfunktion verstanden hat.

12.4 Schaubilder emotional erleben: Romeo und Julia

Luisa Faber, Jeanette Gutmann und Anna-Katharina Mergemann

Bei dieser Übung geht es um Darstellung von Funktionen. Zwei zeitlich parallel verlaufende Bewegungsabläufe sollen als Graph dargestellt werden.



Konkrete Umsetzung

Material und Vorbereitung

Mit Klebeband wird eine Koordinatenachse auf den Klassenzimmerboden, am besten vor der Tafel, markiert. Ein Nullpunkt wird festgelegt. An die Tafel wird ein (zweidimensionales) Koordinatensystem gezeichnet, wobei die x-Achse der Zeit entspricht und die y-Achse dem Weg.

Durchführung

Zwei Freiwillige – Romeo und Julia – sind im Folgenden die Akteure. Julia geht schlendernd auf Romeo zu. Dieser hat allerdings seine Brille verloren (sie wurde ihm davor abgenommen) und bleibt deshalb anfangs nur stehen, bis er irgendwann Julia erkennt und dann zügig auf sie zugeht.

Die Zuschauer sollen die Bewegung der beiden für sich in einem Koordinatensystem festhalten.

Dieses Schauspiel sollte mindestens drei Mal wiederholt werden, um allen Schülern den Aufschrieb und eventuell die Kontrolle beider Graphen zu ermöglichen.

Erweiterung

Zusätzlich zur Ergebnissicherung im Heft sollte noch ein gemeinsamer Vergleich an der Tafel stattfinden. Dabei bietet es sich an, die Schauspieler einzeln laufen zu lassen und gleichzeitig den jeweiligen Graphen anzeichnen zu lassen. Diese Verknüpfung der enaktiven und ikonischen Ebene, kann zusätzlich noch durch die symbolische ergänzt werden, indem ein weiterer Schüler als Erzählperson das Schauspiel währenddessen beschreibt.

Hintergrund

Verstehen von Zusammenhängen

Durch das Sehen der Bewegung und gleichzeitiges Einzeichnen in ein Koordinatensystem werden die Funktionswerte als reale Zeiten mit dem zugehörigen Ort greifbar. So können später Funktionen anschaulich nachvollzogen und verstanden werden. Der Treffpunkt beider Graphen entspricht dem Umarmen – d. h. räumliche und zeitliche Komponenten müssen zusammenspielen, um graphisch einen Schnittpunkt zu erzeugen. Hiermit bekommt das Phänomen eines Schnittpunktes, das anfangs vielleicht abstrakt erscheint, einen emotionalen Hintergrund, um besser verstanden zu werden.

Variation

Anstelle der Liebesgeschichte, die in manchen Klassen/-stufen eventuell ungeschickt ist, kann auch ein Auto-/Fahrradrennen mit Zusammenstoß und vieles mehr inszeniert werden.

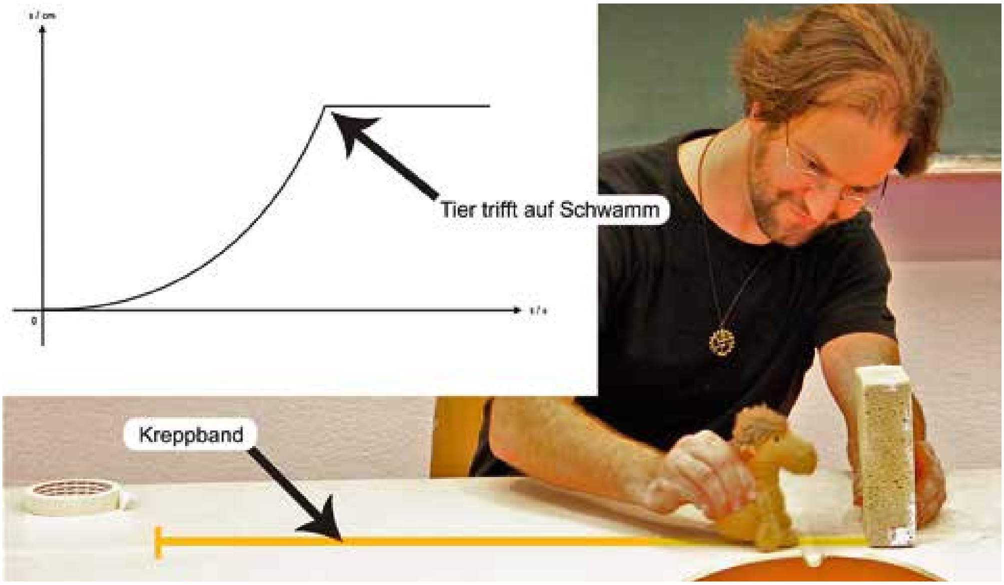
12.5 Beschreibung von Bewegung durch Schaubilder

Natasha Fix, Jannick Bieger, Christian Linke und Samuel Roth

Es soll eine mit einem Stofftier vorgeführte Bewegung durch ein Schaubild dargestellt werden.

Konkrete Umsetzung

Der Lehrer klebt einen Streifen Kreppband auf den Tisch, welcher die y-Achse darstellt. Der Held unserer Geschichte rennt immer schneller gegen eine Wand, die durch einen Schwamm dargestellt ist. Während der Lehrer die Bewegung dreimal wiederholt, zeichnen die Schüler das zugehörige Schaubild auf.



Hintergrund

Vom Konkreten zum Abstrakten

Die Schwierigkeit beim Zeichnen des Schaubildes besteht darin, dass die Schüler die Achsen nicht konkret vor sich sehen. Der Streifen Kreppband verläuft längs des Tisches, stellt aber die y-Achse dar. Die x-Achse ist unsichtbar, sie ist die Zeit in Sekunden. Die Schüler müssen sich selbst überlegen, wie sie die Achsen wählen müssen.

Mögliche Aufgabe in einer Klassenarbeit

Diese Aufgabenstellung kann in einer Klassenarbeit verwendet werden. Die Korrekturzeit für ein solches Diagramm ist angenehm gering und stellt somit eine Erleichterung für die Lehrkraft dar.

12.6 Strecke, Geschwindigkeit und Beschleunigung mit dem Auto

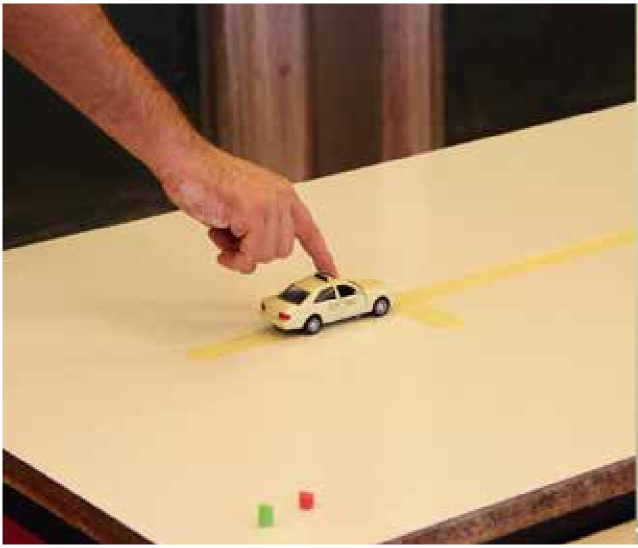
Matthias Friedmann und Leonard Kalb

Bei dieser Aufgabe geht es um die Beziehung von Funktionen und deren Ableitungen.

Vorbereitung

Der Lehrer klebt einen ca. ein Meter langen Kreppband-Streifen auf das Pult. Eine Seite wird mit einem Pfeil markiert. Dieser Streifen stellt die y-Achse dar. Außerdem wird ein Spielzeugauto mit Aufziehmotor benötigt.

Die Schüler zeichnen jeweils drei Koordinaten-Systeme in ihr Heft und Beschriften es mit s-t Diagramm, v-t Diagramm und a-t Diagramm. Die x-Achse ist die Zeitachse.



Konkrete Umsetzung

Der Lehrer lässt das Auto mehrmals fahren. Die Aufgabe der Schüler besteht darin, die drei Diagramme genau untereinander zu zeichnen, so dass die Beziehungen der Diagramme untereinander klar werden. So werden zum Beispiel Extremwerte der Funktion zu Nullstellen der Ableitung.

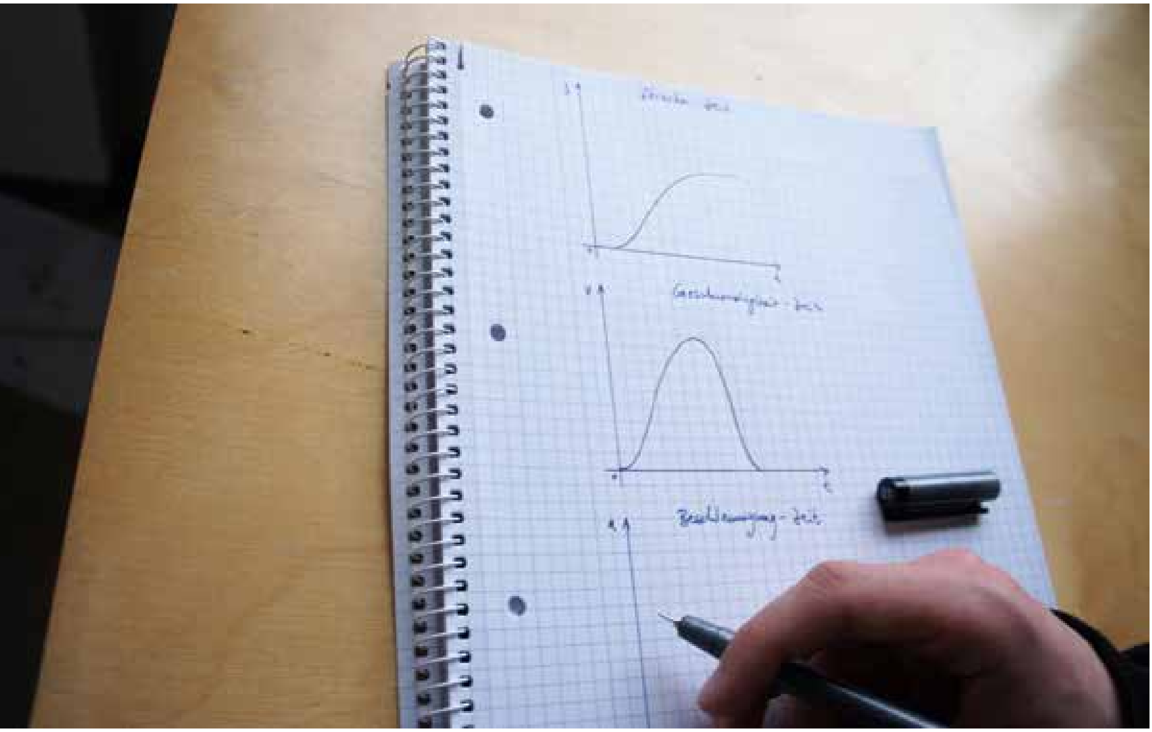
Hintergründe

Verknüpfung über das Material

Alle Schaubilder beziehen sich auf eine Autofahrt. Damit sind Funktionen und Ableitungen materiell miteinander verknüpft.

Grafische Herangehensweise

Dieser Einstieg eignet sich als erste Begegnung mit Ableitungen. Dies ermöglicht eine anschauliche Herangehensweise bevor formale Rechnungen von der zugrunde liegenden Idee der Differentialrechnung ablenken.



12.7 Funktionen im Glas

Eileen Klein, Maximilian Maurer, Michael Schwald und Leonie Werner

In der folgenden Übung wird den Schülern ein tieferes Verständnis im Umgang mit Funktionen und den zugehörigen Schaubildern vermittelt.

Es geht um Modellierung.

Konkrete Umsetzung

Die Farbgruppen sollen ein Glas mit in den Unterricht bringen. Je unterschiedlicher die Formen (Weinglas, Plastikflasche etc.), desto besser. Nun können die Gläser der Gruppen beliebig mit Wasser gefüllt werden. Die Schüler sollen in einem Schaubild den möglichen Kurvenverlauf, bei gleichmäßiger Wasserzufuhr, skizzieren. Die x-Achse entspricht der Zeit, die y-Achse der Höhe. Zu jedem Behälter wird ein Diagramm gezeichnet. An den einzelnen Stationen können die Schüler sich mit anderen aus der Klasse austauschen und ihre Ergebnisse diskutieren.

Erweiterung 1

In der Unterstufe eignet sich als Vorbereitung, statt einer kontinuierlichen Wasserzufuhr, folgende Übung als Hausaufgabe: Ein beliebiges Glas wird nach und nach mithilfe eines Schnapsglases mit Wasser aufgefüllt. Parallel dazu wird nach jeder Wasserzufuhr der Wasserstand gemessen und Schritt für Schritt in ein Schaubild eingetragen.

Erweiterung 2

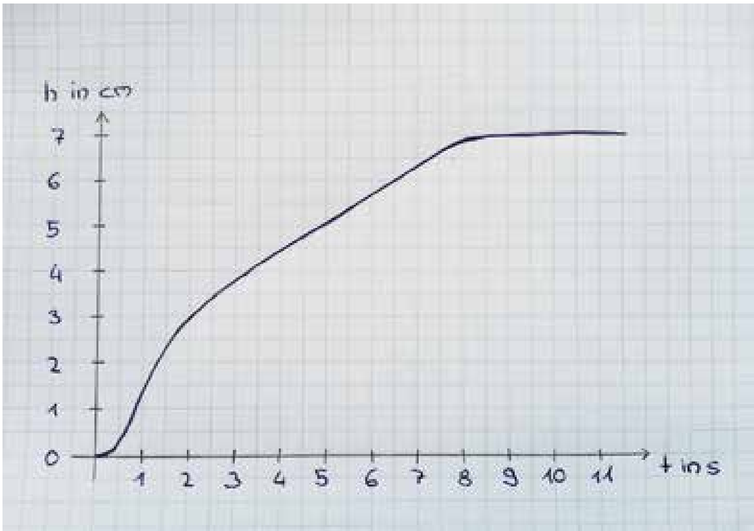
Auch in eine Klassenarbeit kann die Übung mit eingebaut werden, indem der Lehrer ein Glas seiner Wahl auf das Pult stellt und die Schüler, wie oben beschrieben, den Kurvenverlauf skizzieren.

Hintergründe

Vertiefendes mathematisches Verständnis – Binnendifferenzierung

Jeder Schüler versteht, dass die Schaubilder monoton steigend sind. Es können auch tiefergehende Fragestellungen behandelt werden.

Mögliche Frage	Mögliche Antwort
Lässt sich der Funktionsterm konkret abgeben?	Nein, da ein Schnitt durch das Glas nicht analytisch vorliegt. Eine näherungsweise Beschreibung ist möglich.
Lässt sich eine Steigung im Nullpunkt angeben? Wenn ja, welche?	Im Beispiel ist die Steigung 0.
Welchen Einfluss hat die Strömungsstärke des Wassers auf den Kurvenverlauf?	Bei halber Strömungsstärke wird das Schaubild in *x*-Richtung um den Faktor 2 gestreckt.



Räumliches Vorstellungsvermögen

Die Schüler übertragen das Alltägliche in ein mathematisches Diagramm. Da das Füllen des Glases nicht wirklich stattfindet, muss der Schüler auf sein Vorstellungsvermögen zurückgreifen und sich die Höhe im Vergleich zur Zeit denken.

Mathematik versprachlichen

Die Übung fördert die Kommunikationsfähigkeit zwischen den Schülern. Sie diskutieren, argumentieren und erklären sich gegenseitig ihr Vorgehen. Sie versuchen mathematische Phänomene in ihren eigenen Worten wiederzugeben und sie dadurch anderen verständlicher zu machen.

Problemlösefähigkeit

Die Schüler entwickeln Strategien, wie sie am besten an die Aufgabe herangehen können. Nach einer Weile tragen sie zuerst die wichtigen Punkte, wie Startpunkt, Endpunkt, ggf. Wendepunkt etc. ein und verbinden diese. Die Diagramme werden dadurch genauer.

Alltag im Unterricht

Die Schüler bringen die Gläser selbst in den Unterricht mit und haben somit einen persönlichen Bezug dazu. Die Mathematik wird im Glas wieder mit nach Hause genommen.

13 Umkehrfunktionen, Verkettung und Verschiebung

13.1 Verkettung von Funktionen – die Rechenmaschine

Dennis Gillian und Johannes Maier

Die Übung zeigt, dass es auf die Reihenfolge der Verkettung ankommt. Schüler schlüpfen in die Rolle von Funktionen.

Konkrete Durchführung

Für diese Übung benötigt man eine Vielzahl möglichst gleicher Stifte. Der Lehrer beschriftet zwei Karten, in unserem Beispiel „plus 3“ und „mal 2“ und überreicht diese an zwei Freiwillige, wobei die Klasse nicht sieht, was auf den Karten steht. Jetzt werden von der Klasse beliebige (natürliche) Zahlen genannt. Der Lehrer gibt dem linken Schüler die genannte Anzahl an Stiften, woraufhin dieser seine Rechenoperation, für die Klasse nicht sichtbar, anwendet. In unserem Beispiel gibt er drei Stifte hinzu und reicht die neue Anzahl, ebenfalls für die Klasse nicht sichtbar, an den zweiten Schüler weiter. Dieser verdoppelt die Anzahl und zeigt das Ergebnis der Klasse.

Der erste Durchgang wird vom Lehrer an der Tafel auf der symbolischen Ebene dokumentiert. Das Experiment wird solange mit weiteren Zahlen wiederholt, bis die Klasse die Verkettung $f(x) = 2x + 6$ oder $f(x) = (x + 3) \cdot 2$ erkennt.

Anschließend tauschen die beiden Freiwilligen die Plätze. Dadurch erfahren die Schüler, dass die Verknüpfung von Funktionen nicht kommutativ ist.

Hintergründe

Rollenzuordnung

In dieser Übung lassen sich Funktionen wie $f(x) = x$ und $f(x) = 0$ sehr gut konkrete Rollen zuordnen. Zum Beispiel kann für $f(x) = x$ die Rolle des „Faulpelzes“ und für $f(x) = 0$ die Rolle des „Plattmachers“ definiert werden.

Negative Zahlen – Ortskodierung

Eine negative Zahl wird durch einen mit Deckel nach „unten“ zeigenden Stift dargestellt, dementsprechend eine positive Zahl mit dem Deckel nach „oben“. Nun muss besonders auf die „Richtung“ der Stifte geachtet werden.

Kettenregel

Mit dieser Übung kann man auch verdeutlichen, dass die zuletzt ausgeführte Vorschrift die „äußere Funktion“ für die Ableitungsregel wiedergibt.

Beispiel: $x \rightarrow \sqrt{x} \rightarrow \sin x \rightarrow e^x$:

$e^{\sin\sqrt{x}}$

13.2 Einführung der Umkehrfunktion

Dennis Dressel und David Ruf

Konkrete Umsetzung

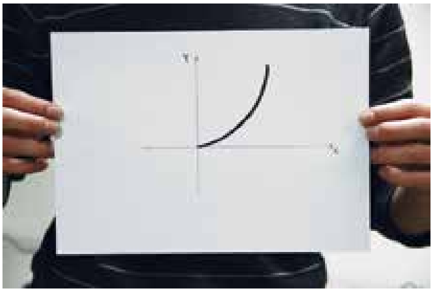
Ein Koordinatensystem wird auf ein leeres Blatt gezeichnet.

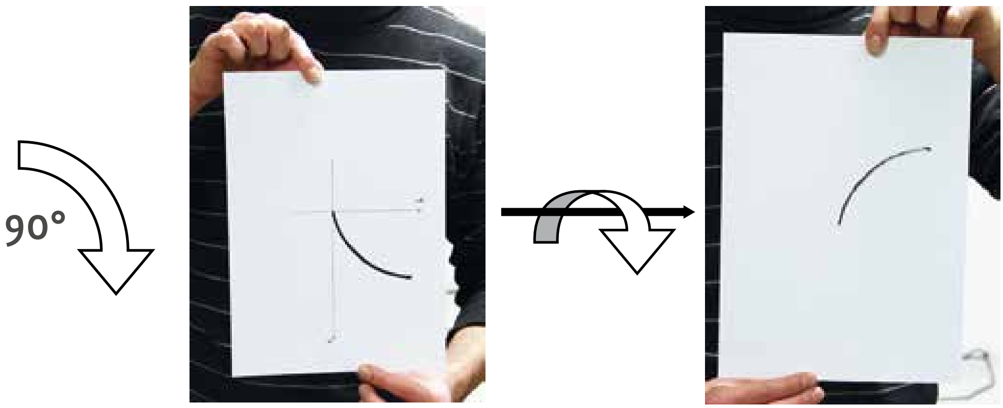
Eine Skalierung ist hierbei nicht erforderlich, allerdings die Beschriftung der x – und y – Achse.

Das Blatt wird mit einer umkehrbaren Funktion versehen, welche die Schüler mit einem dicken Stift in ihr Koordinatensystem einzeichnen.

Die zugehörige Umkehrfunktion muss von y nach x abbilden, das heißt, es muss eine Vertauschung der Achsen stattfinden.

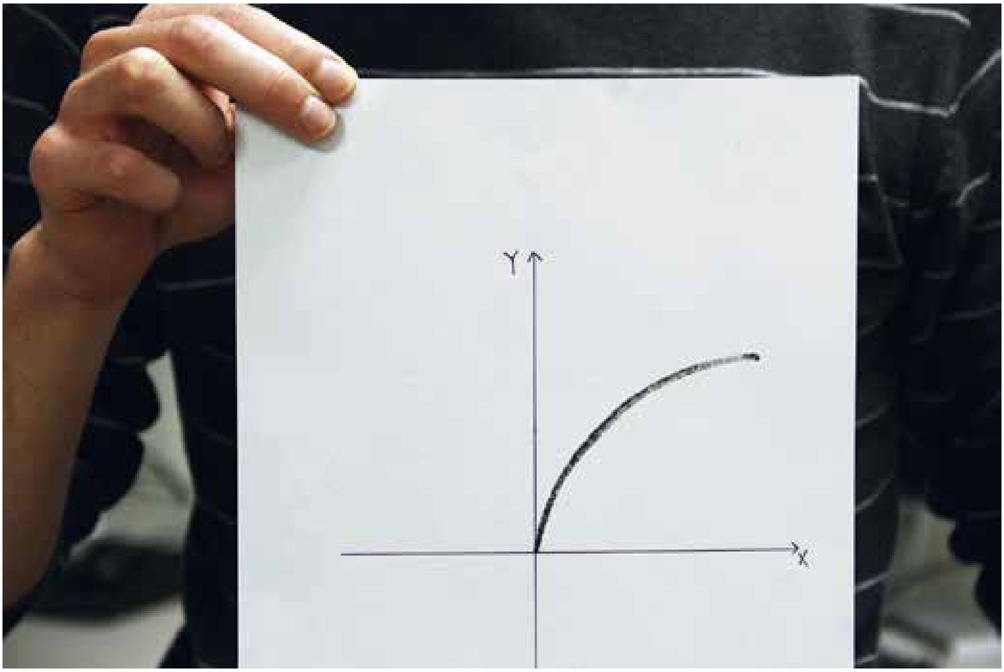
Diese geschieht folgendermaßen:





Auf der jetzigen Vorderseite sehen wir die Umkehrfunktion, welche durch das Papier sichtbar ist.

Es ist klar, dass die Umkehrfunktion eine eigenständige Funktion ist, die das frühere y auf das frühere x abbildet. Für das neu gewonnene Schaubild kann ein neues Koordinatensystem eingezeichnet werden.



Hintergründe

Hier erfährt der Schüler haptisch das Umkehren einer Funktion.

Die mathematische Nähe der ursprünglichen Funktion zu ihrer Umkehrfunktion wird durch Verwenden desselben Graphen aufgezeigt.

Bemerkung

In einem nächsten Schritt könnte man beispielsweise versuchen, die Funktion $f(x) = x^2$ nach dem eben erlernten Prinzip umzukehren.

Es wird auffallen, dass die vermeintliche Umkehrfunktion keine Funktion darstellt. Durch die Diskussion mehrerer Beispiele können die Schüler ein Gefühl dafür entwickeln, wann eine Funktion umkehrbar ist und wann nicht. Aus mathematischer Sicht werden hier die Phänomene der Injektivität, Surjektivität und Bijektivität behandelt.

13.3 Verschiebung von Parabeln- Ermittlung des Scheitels

Alexander Mersch, Hauke Lehmann und Debora Beß

Das Verschieben von Funktionen nach oben und unten ist einfach zu erklären.

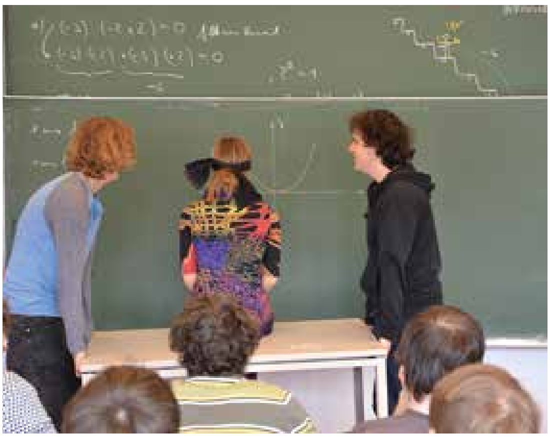
Jedoch weist die Erklärung von Verschiebungen nach links und rechts Probleme auf.

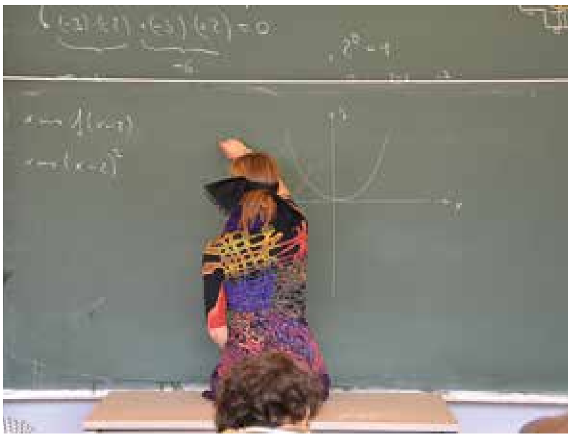
Konkrete Umsetzung

Ein Schüler setzt sich auf die Mitte des Lehrerpultes mit dem Gesicht zur Tafel, direkt vor den Ursprung eines eingezeichneten Koordinatensystems und zeichnet eine Normalparabel.

Danach werden dem Schüler die Augen verbunden. Zwei weitere Klassenkameraden heben den Tisch an und bewegen ihn hin und her, damit der Blinde seine Orientierung in x-Richtung verliert.

Sie setzen ihn an einer anderen Stelle auf der x-Achse, zum Beispiel (-3), wieder ab, wo der Schüler an dieser Stelle erneut eine Normalparabel einzeichnet. Hierbei behandelt der Blinde die (-3) wie eine 0, eine (-2) wie eine $(+1)$. Daher lautet die Funktionsvorschrift $(x+3)^2$.





14 Wachstum

14.1 Exponentielles Wachstum

Timea Sebesi, Wera Winterhalter und Christina Körber

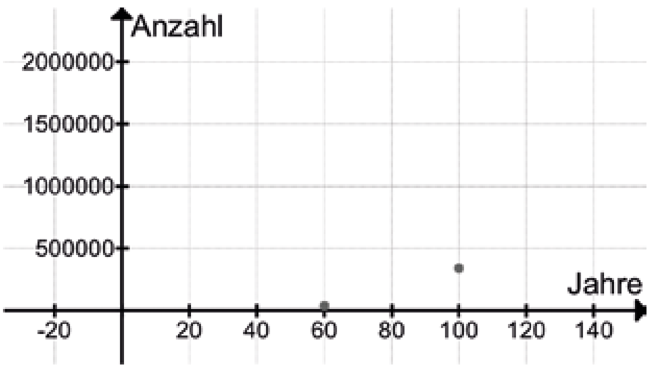
Exponentielles Wachstum kann sehr schlecht geschätzt werden. In diesem Kapitel werden wir das exponentielle Wachstum auf erfahrbarer Ebene kennen lernen.

Konkrete Umsetzung – Traktoren

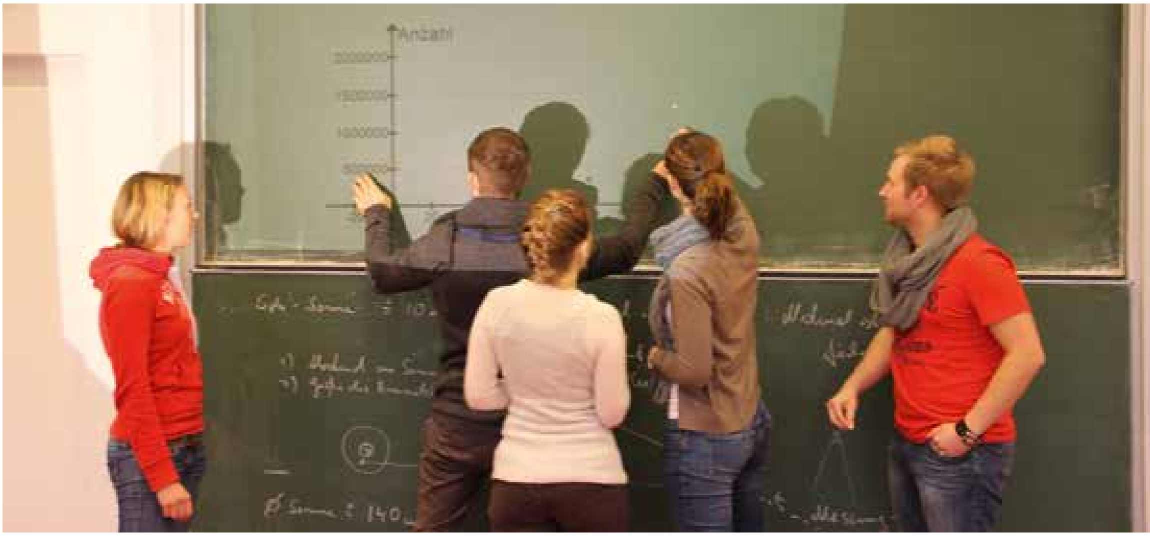
„Ein Unternehmen produziert im Jahre 1976 1000 Traktoren.

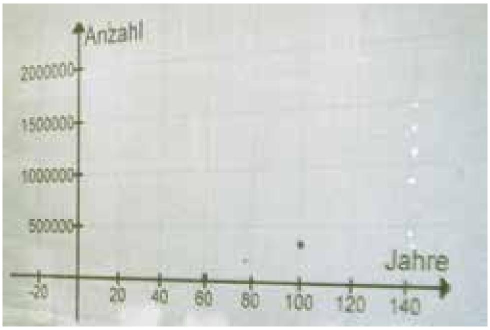
Wie viele Traktoren müssen in den Jahren 1990, 2020, 2050 und 2080 hergestellt werden, wenn davon ausgegangen werden kann, dass das Unternehmen nur bei einer jährlichen Wachstumsrate von 6% überleben kann?“

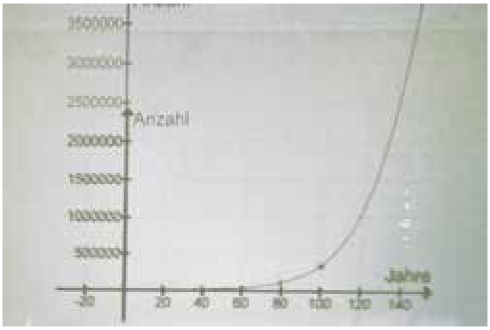
Folgende Grafik verdeutlicht die Situation:



Nun legt der Lehrer circa 5 bis 6 Schülern unterschiedlich farbige Kreide in die Hand. Die Schüler sollen die geschätzte Produktionsmenge zum Beispiel für das Jahr 2080 einzeichnen.







Konkrete Umsetzung – Das Schachbrett und die Reiskörner

Auf das erste Feld wird ein Reiskorn gelegt, auf die nächsten Felder immer doppelt so viele wie auf das vorherige. Zur Illustration genügt die Besetzung der ersten fünf Felder.

Reicht die Menge an mitgebrachtem Reis? Braucht es mehrere Reissäcke? Wieviele Reiskörner befinden sich auf dem letzten Feld?

Der Leser kennt die Antwort. Auf der ganzen Welt gibt es nicht so viel Reis um alle Felder zu füllen.

Konkrete Umsetzung – Centstücke

Die Schüler kommen zum Pult und legen 1-Centstücke auf den Tisch. Insgesamt 30 Cent sind ausreichend.

Durchführung im Unterricht

Der Lehrer positioniert zwei Münzen etwa im Abstand von 60cm auf dem Tisch und stapelt weitere Münzen wie auf dem Bild zu sehen.

Wie hoch wird der Stapel an der letzten Münze sein?

Der Turm hätte die Höhe der Entfernung von der Erde bis zum Mond.

Hintergründe

Exponentielles Wachstum lässt sich schlecht schätzen

Erstes Beispiel: Traktoren

Die Erfahrung zeigt, dass die meisten Schüler ihr Kreuz im Koordinatensystem viel zu weit unten setzen, insbesondere wenn ihnen das notwendige mathematische Vorwissen fehlt. Dies liegt daran, dass gerade exponentielle Wachstumsprozesse für das menschliche Gehirn sehr schwer zu erfassen sind. Sinn dieser Übung ist es, eine Art „Aha-Effekt" bei den Schülern auszulösen. Indem sie sehen, wie weit ihre geschätzten Lösungen von der richtigen Lösung entfernt sind, werden sie sich der enormen Wachstumsgeschwindigkeit exponentieller Prozesse bewusst.

Zweites Beispiel: Schachbrett

Durch dieses Experiment wird den Schülern das extreme Wachstum der Exponentialfunktion veranschaulicht. Insbesondere zeigt sich hier auch, dass die meisten Schüler zwar angeben, dass sich auf dem letzten Feld sehr viele Reiskörner befinden, jedoch wird sich der geschätzte weit unter dem exakten Wert befinden. Um den Schülern die Größe des Wertes 2 hoch 63 zu vermitteln, könnte man ihnen zum Beispiel sagen, dass das etwa dem zwanzigfachen der Anzahl Sekunden entspricht, seitdem das Universum existiert.

Pult und Tafel als Bühne

Warum liegen nur Centstücke auf dem Tisch? Warum ist das Pult leer und die Tafel sauber? Damit werden Ablenkungen und eventuelle Störungen vermieden. Wir assoziieren mit bestimmten Gegenständen, die auf dem Tisch liegen, eigene Gedanken und Erfahrungen. Würde beispielsweise noch ein Schwamm, zusätzlich zu den Münzen, auf dem Tisch liegen, so würden wir diese Gegenstände in unsere Assoziationen mit einbinden und die Aufmerksamkeit auf das Wesentliche wäre abgelenkt.

Schüler werden materiell mit eingebunden

Warum nimmt man Centstücke von Schülern? Das Interesse der Schüler wächst, je mehr sie in das Geschehen mit eingebunden werden. Durch das vorbringen ihres Geldes wird die Neugier geweckt. Umso überraschender ist das Ergebnis hinterher, wie schnell sich ihr Geld vermehrt, wenn man stets die doppelte Anzahl an Münzen aufreiht.

14.2 Exponentialfunktion und Akustikgitarre

Christian Marschner

Konkrete Umsetzung

Benötigt wird eine Gitarre. Mit dieser kann man den Grundton einer Saite oktavieren, indem man die Saite halbiert (Finger auf den zwölften Bund legen). Die Töne sollten vorgespielt werden, um die Oktavierung hörbar zu machen.

Was hat das Ganze mit exponentiellem Wachstum zu tun? Eine Lösung ist, dass eine weitere Halbierung der Saite den Ton erneut oktavieren würde, eine dritte Halbierung noch einmal, und so weiter. Dies ist so lange möglich, bis die physikalischen Rahmenbedingungen der Saite es nicht mehr zulassen.

Potenzieren bekommt eine akustische Bedeutung und ist somit fächerübergreifend. Das betrifft sowohl die Musik wie auch die physikalischen Themen Schwingungen und Wellen.

14.3 Zufall und exponentieller Zerfall - Kerne altern nicht

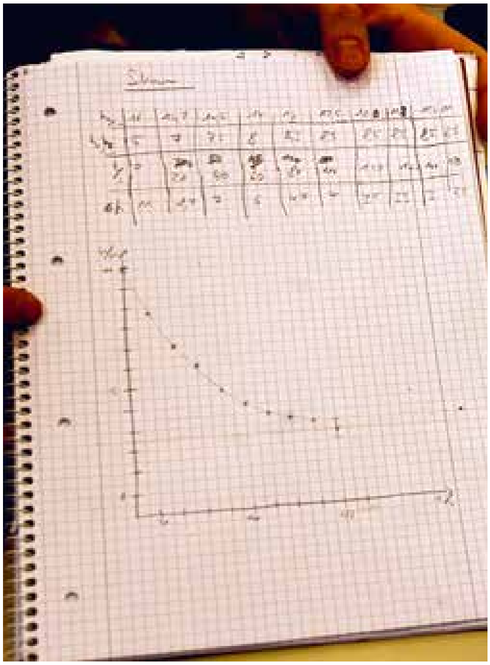
Julia Lang und Kerstin Wunsch

Wir Menschen sterben nicht zufällig. Mit hoher Wahrscheinlichkeit erreichen wir ein Alter zwischen 75 und 90 Jahren. Atomkerne hingegen altern nicht. Sie explodieren mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit. Es ist einem Kern also egal, ob er bereits ein paar Millionen Jahre existiert oder gerade erst entstanden ist. Folgende Übung stellt die Situation nach.

Jeder Schüler nimmt die Rolle eines Atomkernes ein. Zerfall oder Überleben wird mit einer Münze entschieden. Bei “Zahl” zerfällt der Schüler auf seinem Platz und setzt sich, bei “Kopf” darf er stehen bleiben. Dann folgt die nächste Runde, die nächste Halbwertszeit. Die Stehenden werfen erneut. Das Spiel setzt sich solange fort, bis alle Atomkerne zerfallen sind.

14.4 Modellierung eines Bierschaumzerfalls

Julia Lang und Kerstin Wunsch



Beim Bierschaumexperiment betrachtet man den Zerfall der Schaumkrone bei schnell eingeschenktem Bier. Das Experiment lässt sich in der Mittel- oder Oberstufe durchführen. Hierbei kann exponentielles Wachstum, beziehungsweiße exponentieller Zerfall, sowie die Halbwertszeit veranschaulicht werden.

Vorbereitung

Jede Gruppe bringt ein Geodreieck, ein zylinderförmiges Glas, einen Zollstock und eine Flasche Bier oder Karamalz, je nachdem in welcher Klassenstufe das Experiment stattfindet, mit.

Von der Theorie...

Ziel des Experiments ist es, den Zerfall des Bierschaums als konkrete Funktion zu modellieren. Zur Erfassung der gemessenen Werte dient folgende Tabelle. Die Zeit wird dabei in Sekunden und die Schaumhöhe in Zentimetern dokumentiert.

Zeit t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
Schaumhöhe h										

Zeit t	50	60	70	80	100	120	140	170
Schaumhöhe h								

Des Weiteren wird ein Diagramm vorgegeben, um in diesem die beobachteten Daten einzuzeichnen.

Ziel des Experiments ist es, den Zerfall des Bierschaums in einer Formel festzuhalten. Die Grundformel wird vorgegeben: $f(t) = c \cdot a^2$.

In der Beschreibung des exponentiellen Wachstums sind a und c zu bestimmen.

Aufgabenverteilung innerhalb der Farbgruppe

- Der Zeitmanager ist für die Messungen in den vorgegebenen Zeitabschnitten zuständig.
- Der Protokollant trägt die Messwerte in die Tabelle ein.
- Der Schüler mit dem Geodreieck ermittelt die Schaumhöhe.
- Der Schüler mit dem Zollstock misst vom Geodreieck zur Unterkante des Schaums. Achtung: Während der Messung ändert sich diese Größe!

… zur Praxis

Die gemessenen Werte werden als Graph in das Schaubild eingetragen. Zu der entstandenen Kurve soll jetzt die Zuordnungsvorschrift gefunden werden.

Umsetzung in der Kursstufe

Das Experiment lässt sich durch Veränderungen der Vorgaben auf die Oberstufe übertragen. Hierbei wird das Zerfallsgesetz mit Hilfe der e-Funktion $f(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$. beschrieben. Weiter kann die Halbwertzeit bestimmt werden.

Hintergründe

Materielle Mitverantwortung der Schüler

Wenn die Schüler ihr eigenes Material mitbringen müssen und dafür Verantwortung tragen, dass das Experiment durchgeführt werden kann, haben sie einen besseren Bezug zur Aufgabenstellung. Der Alltagszusammenhang bewirkt, dass das Experiment den Schülern besser im Gedächtnis bleibt.

Dabei ist ein erfreulicher Nebeneffekt, dass sich der Lehrer nicht um das Material kümmern muss. Das Experiment wird somit praxistauglich.

Modellierung

Ein konkretes Naturereignis wird mathematisch modelliert. Man könnte fast sagen, die Natur kennt die Mathematik.

Kompetenzschulung

Kompetenztraining beginnt bereits bei der Blattaufteilung. Wie werden die Achsen skaliert? Weiter geht es mit der Datenerhebung. Ergibt es einen Sinn, alle zehn Sekunden die Höhe zu messen oder sollte zu Beginn häufiger und am Ende seltener gemessen werden? Und schließlich eine schwierige Frage: Welche Werte aus dem Schaubild sollen verwendet werden, um die Zuordnungsvorschrift zu bestimmen?

Schwierigkeitsgrad und Aufgabenstellung

Der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe hängt von den Vorgaben des Lehrers ab. Je weniger Vorgaben gegeben werden, desto größer ist der Spielraum. Je nach Klasse werden die Vorgaben unterschiedlich sein. Für die Kursstufe werden z. B. keine Messzeitpunkte in der Tabelle vorgegeben. Die Schüler müssen selbst sinnvolle Zeitabstände zur Messung der Schaumhöhe finden.

14.5 Wachstum von Kresse

Laura Schönberger und Tobias Schricke

Das durchschnittliche Wachstum von Kresse soll über zwei Wochen als Graph einer Funktion dargestellt werden.

Konkrete Umsetzung

Benötigtes Material und Vorbereitung

Zur Durchführung werden Kressesamen, Küchen- oder Toilettenpapier, ein Suppenteller, Tesafilm, eine Schere und etwas, um die Pflanzen pressen zu können (z. B. schwere Bücher), benötigt. In die Suppenschüssel werden mehrere Lagen Küchen-

bzw. Toilettenpapier gelegt und die Kressesamen darauf verteilt. Anschließend wird ausreichend Wasser in den Teller gegossen.

Durchführung

Das Wachstum kann über einen beliebigen Zeitraum betrachtet werden, wobei eine Dauer von etwa 14 Tagen sinnvoll ist. Jeden Tag wird zur gleichen Zeit ein repräsentatives Kressepflänzchen vorsichtig entnommen und zum Trocknen gepresst. Der Wachstumsort sollte vor Beginn gewählt und dann nicht mehr geändert werden. Außerdem ist darauf zu achten, dass stets genügend Wasser im Teller ist, da die Kresse sonst schnell vertrocknet.

Ergebnissicherung

Um das Wachstum der Kresse sichtbar zu machen, wird ein Koordinatensystem angelegt. Die x-Achse beschreibt die Zeit in Tagen nach der Anpflanzung, die y-Achse die Höhe der Kresse in Zentimetern. Jeden Tag wird das entnommene, getrocknete Kressepflänzchen mit einem Streifen Tesafilm an den entsprechenden Tag eingeklebt.

An diesem Schaubild kann nun das durchschnittliche Wachstum der Kresse als Funktion abgelesen werden. Je nachdem wie lange das Wachstum beobachtet wird, erhält man eine beschränkte Funktion, da die Kressepflänzchen ab einem bestimmten Tag nicht mehr bedeutend größer werden.

Hintergrund

Erleben und verstehen

Diese Übung ist vor allem unter dem Aspekt „Mathematik erleben“ zu betrachten. Durch das Kressewachstum erfährt man, was exponentielles Wachstum (bzw. logistisches Wachstum) ist, und lernt es nicht nur stur im Unterricht auswendig. Es ist sehr wichtig zu erkennen, dass exponentielles Wachstum nicht nur ein mathematisches Hirnkonstrukt ist, sondern tatsächlich in unserer Umgebung stattfindet. Außerdem kann man sich nach dieser Aufgabe diese spezielle Art des Wachstums besser vorstellen und sich daran erinnern.

Kompetenzen im Unterricht

Ein weiterer wichtiger Lernaspekt ist die benötigte Verantwortung. Der Schüler ist allein für das Gelingen der Aufgabe verantwortlich. So muss man täglich daran denken, ein Pflänzchen zu ernten, es zu trocknen und aufzukleben, sowie ausreichend zu gießen. Ebenso müssen einige auftretende Probleme gelöst werden, wie zum Beispiel wie viel Papier muss man verwenden? Welches Pflänzchen hat Durchschnittsgröße? Wie viel Wasser benötigt die Kresse?

Binnendifferenzierung

Ein wichtiger Aspekt, der diese Übung umso stärker macht, ist die Binnendifferenzierung. So lässt sich die Kresse aus mathematischer Sicht sowohl in der 5. als auch in der 12. Klasse anpflanzen. Wichtig ist jedoch, worauf das Augenmerk in der Auswertung gelegt wird. In einer 5. Klasse geht es hauptsächlich um das Erleben an sich, sowie die ersten Erfahrungen mit einer Funktion. Eine mögliche Aufgabenstellung könnte das tägliche Ausmessen der Pflänzchen sein. In der Kursstufe kann hingegen schon eine Wachstumsfunktion modelliert werden. Ein weiterer toller Effekt dieser Aufgabe ist, dass jeder Schüler so viel Zeit zum Ernten und Aufkleben hat, wie er benötigt. Dies ist vor allem bei jüngeren Klassen wichtig.

Fächerübergreifend

Kresse anzupflanzen ist eine fächerübergreifende Aufgabe. So lässt sich diese Aufgabe gut mit anderen naturwissenschaftlichen Fächern, wie Biologie oder Naturphänomene verbinden. Hier wird das Augenmerk auf das Erleben von Natur und Wachstum gelegt. Auch im Fach Religion kann das Anpflanzen von Kresse einen Einstieg in das Thema „Leben“ darstellen.

Persönlicher Bezug: Kresse

Diese Übung bringt einen starken persönlichen Bezug mit sich. So hat sicherlich jeder schon mal im Kindergarten oder in der Grundschule Kresse angepflanzt, um die Natur zu erleben. Es werden also viele Erinnerungen geweckt. Außerdem macht es auch Spaß, die Kresse anzupflanzen und ihr beim Wachsen „zuzuschauen“. Schließlich ist ein toller Nebeneffekt, dass man die übrige Kresse noch für leckere Brotaufstriche, Salate usw. verwenden kann.

15 Winkelfunktionen

15.1 Sinus und Kosinus – ein Schattenspiel?

Markus Biggel, Jeremias Moser-Fendel, Julian Schmidt, Gül Sogukpinar und Georg Waadt

Die Winkelfunktionen werden als Projektion von Drehbewegungen eingeführt.

Konkrete Umsetzung

Der Tageslichtprojektor wird möglichst weit weg von der Wand aufgestellt.

Ein Freiwilliger stellt sich in das Licht, während alle anderen Schüler freie Sicht auf dessen Schatten haben sollten.

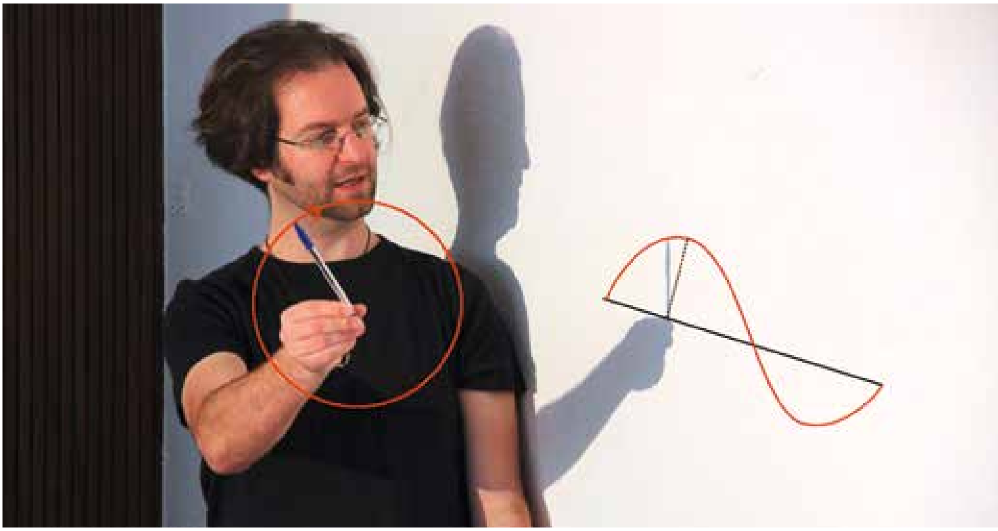
1. Der Freiwillige steht mit dem Rücken zur Wand.
   In welche Richtung blickt der Schatten?
2. Der Freiwillige dreht sich um 180°.
   In welche Richtung blickt der Schatten jetzt?
3. Der Freiwillige stellt sich im Profil auf, so dass man seine Nase im Schatten sehen kann und dreht sich langsam im Uhrzeigersinn um die eigene Achse.
   Welchen Drehsinn besitzt der Schatten?

4. Der Freiwillige steht wieder im Profil, dreht sich um 180° und dann unmittelbar zurück.
   Lässt sich dies als vollständige Drehung des Schattens interpretieren?

Der Lehrer legt bei jeder Frage fest, welches Handzeichen welcher Antwortmöglichkeit entspricht. So sollen die Schüler z. B. mit einem Finger anzeigen, in welche Richtung der Schatten blickt.
Bei der Frage zur Drehrichtung des Schattens sollen die Schüler diese mit der rechten Hand anzeigen (vgl. die wohl aus der Physik bekannte „Rechte-Hand-Regel“). Der Daumen nach oben entspricht einer Drehung des Schattens gegen den Uhrzeigersinn, der Daumen nach unten einer Drehung mit dem Uhrzeigersinn. Durch die nonverbalen Antworten können alle Schüler gleichzeitig eine Antwort geben und werden aktiv in den Lernprozess einbezogen. Weiter wird durch die sich widersprechenden Antworten deutlich, dass die Fragen bezüglich der Dreh- oder Blickrichtung des Schattens nicht eindeutig beantwortet werden können.

Projektion eines Stifts – Einführung von sin(x)

Um den Sinus als Projektion einer Drehung auf die y-Achse einzuführen, kann man im Anschluss an die obige Übung das Schattenspiel mit einem Stift wiederholen.



Hierfür wird der Stift wie in der Abbildung gedreht und gleichzeitig parallel zur Wand geführt. Zeigt der Stift zu Beginn der Drehung zur Lichtquelle, so stellt der Schatten des Stiftes die Sinusfunktion dar.

$\cos(x) = \cos(-x)$

Zwei Freiwillige stehen im Profil zur Wand und bilden mit ihren Händen einen Zeiger. Nun drehen sich beide Schüler langsam in entgegengesetzte Richtung. Bei beiden Schülern ergibt sich das gleiche Schattenbild, was sich formal als $\cos(x) = \cos(-x)$ interpretieren lässt.

Hintergründe

Unterschiedliche Wirklichkeiten

Der Lehrer kann die Schüler am Ende der Befragung darauf hinweisen, dass die Drehrichtung unterschiedlich wahrgenommen werden kann, aber trotzdem niemand richtig oder falsch liegt. Die Antwort auf die Frage, in welche Richtung sich der Schatten dreht, bleibt letztendlich unentschieden. D. h. zwei Menschen können jeweils unterschiedliche Wirklichkeiten wahrnehmen und trotzdem beide Recht haben. Aufgrund sich widersprechender Wirklichkeitsauffassungen entsteht oft leicht Streit. Somit ist die Thematik nahe am Bereich der Gewaltprävention anzusiedeln.

Einführung Sinus, Kosinus – Projektion einer Drehbewegung

Die symbolische Darstellung, wie sie in der Schule angewendet wird, ist die Projektion einer Drehbewegung. Die Drehung des auf dem Tisch stehenden Schülers zeigt, dass nicht mehr entschieden werden kann, in welche Richtung sich der Schatten dreht. Nur die Drehung an sich ist noch wahrzunehmen.

Schüler im Mittelpunkt

Der Lehrer tritt in den Hintergrund und beschränkt sich darauf, Hinweise und Anweisungen zu geben. Die Schüler entwickeln dadurch, dass der Mitschüler und nicht der Lehrer im Mittelpunkt steht, einen anderen Bezug zu der Übung. Es kann z. B. nicht zu der Annahme kommen, durch den Lehrer optisch getäuscht zu werden.

15.2 Darstellung der Sinusfunktion

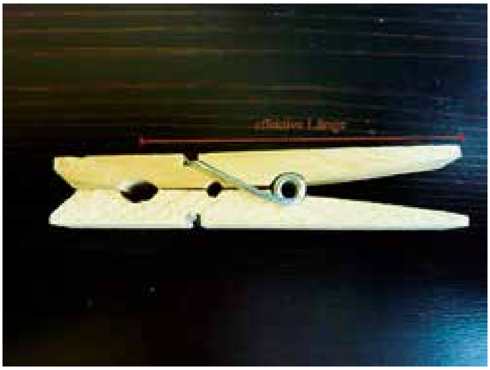
Jeremias Moser-Fendel, Julian Schmidt, Georg Waadt, Markus Biggel und Gül Sogukpinar

Das Schaubild der Sinus-Funktion wird nachgebaut.

Konkrete Umsetzung

Material und Vorbereitung

Pro Gruppe werden ca. 25 Holzwäscheklammern und etwas Krepp-Klebeband benötigt.



Durchführung

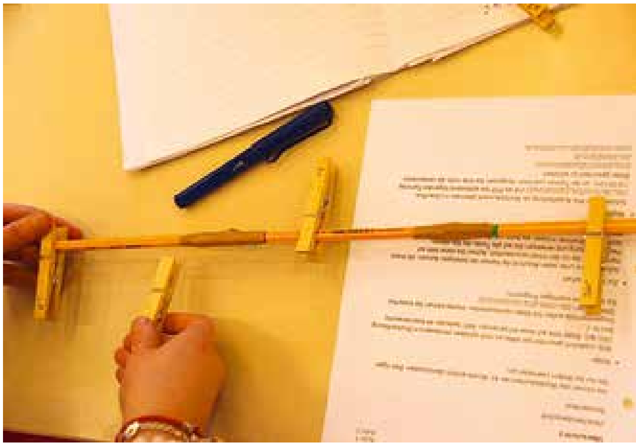
Die Wäscheklammern werden an den Stiften befestigt, um die Sinus-Funktion darzustellen.

Zunächst werden zwei bis drei Stifte auf horizontaler Ebene mit dem Klebeband zusammengeklebt. Diese Achse stellt später im Schattenwurf die x-Achse dar und sollte mindestens die Länge einer Periode haben. Hierbei ist zu beachten, dass die Länger einer Periode abhängig von der „effektiven Länge“ einer Wäscheklammer ist.

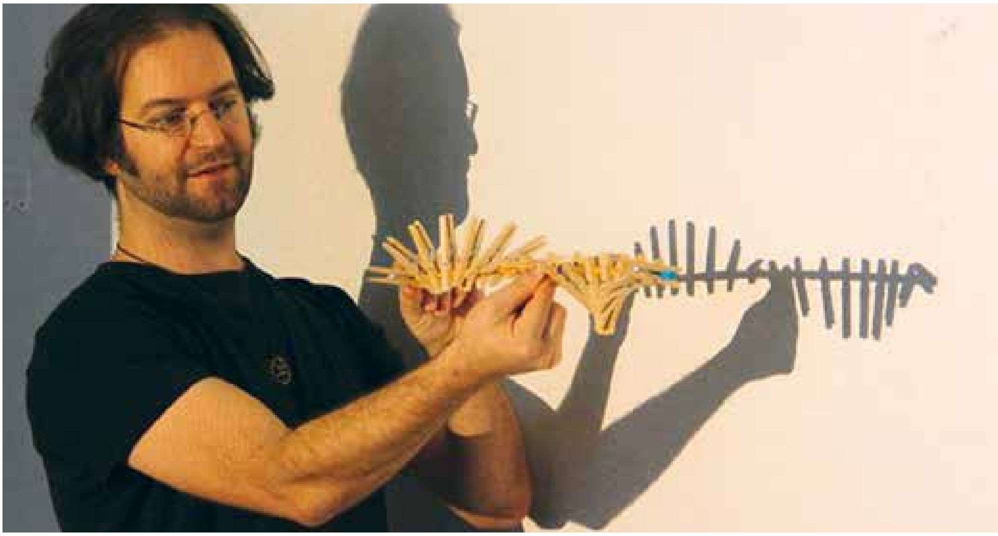
Nacheinander werden dann die Klammern gesetzt. Zuvor wird jeweils auf die eine Seite der Wäscheklammer die Gradzahl und auf die andere Seite die entsprechende Angabe im Bogenmaß geschrieben.

Die Vorgabe, die Klammern zuerst zu beschriften, legt nahe, dass man zuerst die „einfachen“ Klammern befestigt. Es werden also erst die Winkel 0 und 2π behandelt, weiter π, $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$.

Sind die Kunstwerke fertigt gestellt, so halten die Schüler diese in das Licht, um im Schatten die Sinus-Funktion zu betrachten.



Die Gleichheit $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ kann einfach demonstriert werden. „Dreht“ man im Licht die Sinusfunktion gegen den Uhrzeigersinn um $\frac{\pi}{2}$ weiter, so erhält man die Kosinus-Funktion. Dreht man nochmals um $\frac{\pi}{2}$ weiter, erhält man $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$.



Hintergründe

Mathematik wird in den Alltag transportiert

In dieser Übung werden für die Schüler aus dem Alltag bekannte Gegenstände verwendet, wodurch ein emotionaler Zugang der Schüler zu dem Thema hergestellt werden kann.

Am Ende der Übung darf jeder Schüler eine Wäscheklammer als Andenken mit nach Hause nehmen. Wenn man diese zufällig nach Wochen oder Monaten wiederentdeckt, ruft man sich die Übung und infolgedessen die Winkelfunktion Sinus und Kosinus noch einmal ins Gedächtnis.

Gradmaß und Bogenmaß

Durch die Beschriftung der Wäscheklammern findet eine materielle Vereinigung von Grad- und Bogenmaß statt. Die Erkenntnis des direkten Zusammenhangs von Radiant und Grad und das Umrechnen zwischen beiden Maßen wird somit gefördert.

Konstruktivistische Vorgehensweise

Durch den konkreten Aufbau dieser „Sinus-Wäscheklammer-Funktion“ erhalten die Schüler ein tieferes Verständnis für die Winkelfunktionen. So wird etwa der Zusammenhang zwischen der Länge einer Periode und der „effektiven Länge“ der Wäscheklammer oder der Übergang von Sinus zu Kosinus auf einer enaktiven Ebene erkannt und nachhaltig verstanden.

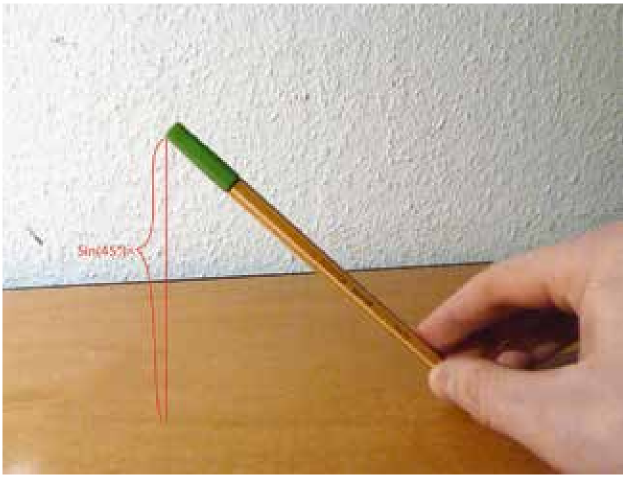
Bezug zum Schaubild

Das Setzen der Wäscheklammern entspricht dem Zeichnen des Schaubildes der Winkelfunktion. So werden zunächst die Klammern bei 0, 2π, π, $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ gesetzt.

15.3 Nonverbale Abfragetechnik über das Material am Beispiel der Sinusfunktion

Armin Hartmann

Mit Stiften wird die Sinusfunktion abgefragt. Durch diese Technik kann man ohne Taschenrechner gut Sinus-Werte abschätzen.



Konkrete Umsetzung

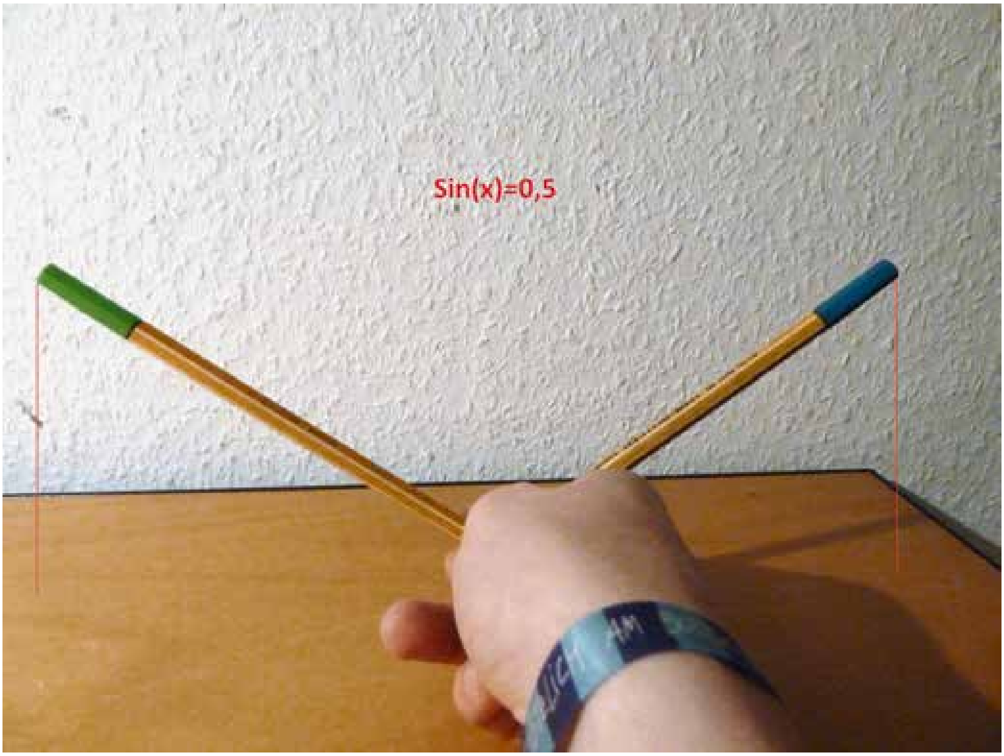
Jeder Schüler legt einen Stift vor sich, der nach links zeigt. Dann wird der Stift nach oben bewegt.

Was ist $\sin(45°)$?

Hier wird der Stift um $45°$ angestellt. Die Höhe des Stiftes über der Tischkante gibt den Wert an.

Es gibt auch umgekehrte Fragestellungen. Es wird ein Wert zwischen Null und Eins vorgegeben, beispielsweise $\sin(x) = 0{,}5$.

Hierbei gibt es zwei Lösungen.



Hintergrund

Optische Kontrolle

Durch die nonverbale Antwort der Schüler hat der Lehrer unmittelbar eine Antwort, wer die Sache verstanden hat und wer nicht. Man vergleiche die verbale Abfrage: Hier wird nur ein Schüler abgefragt und falls er die Antwort nicht weiß unter Umständen vorgeführt.

Index

Q

R

S

T

U

V

W

Z